التحليل العقدي (2) المركب

السنة الثالثة

القسم: الرياضيات

الاختصاص: الرياضيات

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم

التحليل العقدي (2) المركب

الدكتور

محمد مناف الحمد

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق

١٤٣٤ — ١٤٣٥ هـ

٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

الفهرس

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الصفحة	الموضوع
٢٤٧	٢ . ٩ . ٤ . توطئة جوردان الثانية.
٢٥٠	٢ . ٩ . ٥ . مبرهنة (٣).
٢٥٣	٢ . ٩ . ٥ . ١ . أمثلة محلولة.
٢٦٩	٢ . ٩ . ٦ . مبرهنة (٤).
٢٧١	٢ . ٩ . ٧ . التوطئة الثالثة.
٢٧٢	٢ . ٩ . ٨ . أمثلة محلولة.
٢٩٦	٢ . ٩ . ٩ . مبرهنة (١).
٢٩٦	٢ . ٩ . ١٠ . مبرهنة (٢).
٣٠١	٢ . ٩ . ١١ . نتيجة.
٣٠٢	٢ . ٩ . ١٢ . مثال محلول (١).
٣٠٣	٢ . ٩ . ١٣ . مثال محلول (٢).
٣٠٧	٢ . ٩ . ١٤ . مثال محلول (٣).
٣٠٩	٢ . ٩ . ١٥ . مثال محلول (٤).
٣٠٩	٢ . ٩ . ١٦ . مثال محلو ل(٥).
٣١٤	٢ . ٩ . ١٧ . مثال محلول (٦).
٣١٩	٢ . ٩ . ١٨ . مثال محلول (٧).
٣٢٠	٢ . ١٠ . تعاريف ومفاهيم أساسية.

الموضوع	الصفحة
٢ . ١١ . تتمة حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب في حساب التكاملات.	٣٢٧
٢ . ١٢ . تطبيقات مبرهنة الرواسب في حساب مجموع بعض المتسلسلات العقدية.	٤١٥
٢ . ١٢ . ١ . أمثلة محلولة.	٤١٦
٢ . ١٣ . مبدأ الأرغومينت.	٤٢٣
٢ . ١٣ . ١ . مبرهنة (١).	٤٢٤
٢ . ١٣ . ٢ . مبرهنة (٢) (مبدأ الأرغومينت).	٤٢٤
٢ . ١٣ . ٣ . مبرهنة (٣) (مبرهنة روشيه).	٤٢٤
٢ . ١٣ . ٤ . مثال (١).	٤٢٥
٢ . ١٣ . ٥ . مثال (٢).	٤٢٦
٢ . ١٣ . ٦ . مثال (٣).	٤٢٨
٢ . ١٣ . ٧ . مثال (٤).	٤٢٩
٢ . ١٣ . ٨ . مثال (٥).	٤٣٠
٢ . ١٤ . تمارين محلولة.	٤٣٢
٢ . ١٥ . تمارين غير محلولة.	٤٧٢

الصفحة	الموضوع

المقدمة

اهتممنا في هذا الكتاب بدراسة التحليل العقدي (2) المركب، الذي كان ولا يزال واحداً من الفروع العصرية المهمة في التحليل الرياضي، فضلاً عن ذلك له أثر مهم وبارز في معالجة الكثير من المسائل في العلوم الفيزيائية والهندسية وإعطاء التفسير الهندسي لحلول المسائل، إذ إن التحليل المركب يجمع بين التحليل والهندسة والتبولوجيا، وقد أعد هذا الكتاب على نحوٍ يكون منسجماً مع منهاج السنة الثالثة في قسم الرياضيات بكلية العلوم بجامعة دمشق، والجدير بالذكر أن فهم المقرر يستند إلى مبادئ التحليل الحقيقي والتبولوجيا إضافة إلى التحليل العقدي (1) المركب.

اعتمدنا في هذا الكتاب على تبسيط المعلومات تبسيطاً يناسب مستوى الطالب، وأوضحنا جميع الأفكار الواردة فيه بأمثلة محلولة وغير محلولة ملائمة، وأعددنا بعض التمرينات في نهاية كل فصل بغية ترسيخ المعلومات في الذهن بهدف تذليل العقبات التي تواجه الطالب أثناء دراسة المنهاج المقرر، وذلك من خلال ما استنبطناه في المحاضرات النظرية والعملية التي ألقيت على طلاب السنة الثالثة خلال السنوات الأخيرة.

يتكون الكتاب من أربعة فصول دراسية، عرضت وفق تسلسل علمي منطقي وسليم. يضم الفصل الأول متسلسلة لوران والنقاط الشاذة للتوابع وحيدة القيمة والتمديد التحليلي. أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة تفصيلية في مبرهنة الرواسب وتطبيقاتها، وقد توسعنا في البحث في دراسة هذا الموضوع لكي يكون باستطاعتنا الاستفادة من العديد من أفكار نظرية الدوال العقدية وتقديم طرق رياضية منهجية وبسيطة في تطبيقات مبرهنة الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية وإيجاد مجموع بعض المتسلسلات العددية ومبدأ الأرغومينت، وجاء الفصل الثالث ليشمل التطبيقات (التحويلات) المحافظة حيث عرضنا فكرتي الاستمرار التحليلي والدالة المطابقة وبعض الخصائص العامة لها وأهميتها في إيجاد تطبيقات هندسية وفيزيائية، وما جاء في هذا الفصل أيضاً من بحث في مبرهنة تطبيق

ريمان ومبرهنة شوارتز – كريستوفل وللدالة مزدوجة الخطية، إنما يهدف إلى تعريف القارئ بهذه المفاهيم وكيفية إيجاد دالة مزدوجة الخطية تنقل أي ثلاث نقاط مختلفة في المستوي العقدي إلى ثلاث نقاط متميزة أخرى، وكذلك كيف يمكن أن نجد دالة تنقل نصف المستوي العلوي مثلاً إلى قرص مفتوح وبالعكس.

في الفصل الأخير أجرينا دراسة موسعة إلى حد ما للجداءات غير المنتهية وخواصها والتوابع الأولرية (التابع بيتا والتابع غاما).

صغنا موضوعات هذا الجزء صوغاً ينسجم مع طريقة عرض موضوعات الجزء الأول، كما استعرضت عدداً وافياً من الأمثلة المحلولة، وذلك لمساعدة القارئ في تعميق دراسته النظرية لموضوعات الكتاب ولتمكينه من حل المسائل ذات الصعوبة المتدرجة والتطبيقات العملية.

ختاماً، أود تقديم خالص الشكر والتقدير لكل ما أسهم في إخراج هذا العمل المتواضع إلى النور، وسأكون ممتناً لكل من يلحظ بعض الهفوات الأدبية والعلمية التي لا بد منها في عمل البشر حتى أتجاوزها في طبعات لاحقة.

نرجو من الله أن نكون قد وفقنا في وضع مادة علمية فيها من الفائدة والمنفعة لجيل وطننا الغالي، وهو ما نصبو إليه، والله ولي التوفيق.

المؤلف

أ. د. محمد مناف الحمد

الفصل الأول

متسلسلة لوران والنقاط الشاذة للتوابع وحيدة القيمة

Laurent series and Singular point of unique value functions

١ . ١ . تعريف التابع التحليلي:

نقول عن التابع $\omega = f(z)$ إنه تحليلي في المنطقة D من المستوي العقدي إذا كان قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من D. ونقول إن التابع $\omega = f(z)$ تحليلي في النقطة z_0 إذا كان تحليلياً في جوار ما للنقطة z_0، وينتج من التعريف السابق أن مجموع وفرق وجداء وقسمة تابعين تحليليين هو تابع تحليلي في كل نقطة (مع الإشارة إلى أن المقام غير معدوم في حالة القسمة).

١ . ٢ . مبرهنة:

إذا كان التابع تحليلياً فإنه يحقق شرطي كوشي وريمان أي إن:

الشرط اللازم والكافي كي يكون التابع $\omega = f(z)$ تحليلياً في المنطقة D من المستوي العقدي هو أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابعين u, v موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي وريمان الآتيين:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\&\; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

١ . ٣ . تعريف التابع النظامي:

هو تابع تحليلي ووحيد القيمة في كلّ أنحاء C.

١ . ٤ . تعريف التابع الصحيح:

هو ذلك التابع النظامي (أي تحليلي ووحيد القيمة) في كلّ أرجاء المستوي العقدي C، وتقسم التوابع الصحيحة إلى قسمين:

القسم الأول: التوابع الصحيحة المتسامية أي تلك التوابع التي من الشكل:

$$\omega = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

أي تكون الأمثال a_n **غير منتهية** .

القسم الثاني: التوابع الصحيحة العادية أي تلك التوابع التي من الشكل:

$$\omega = f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n . z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

أي تكون الأمثال a_n **منتهية** .

وتدعى التوابع الصحيحة أحياناً (بحدوديات) أو متعددات الحدود وكأمثلة على ذلك: إن كثيرات الحدود من الدرجة n هي توابع صحيحة عادية.

كذلك كثيرات الحدود من الدرجة صفر هي توابع صحيحة عادية، بينما التوابع $\cos z, \sin z, e^z$ جميعها توابع صحيحة متسامية.

ونلفت الانتباه إلى أنه ليس من الضروري أن يكون للتابع الصحيح المتسامي نقاط انعدام، وكمثال على ذلك التابع e^z هو تابع صحيح متسامي وليس له أي نقطة انعدام.

١ . ٥ . النقاط الشاذة لتابع عقدي:

نعلم أن التابع $\omega = f(z)$ التحليلي في المنطقة D هو تابع قابل للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة D ولكن يمكن أن يوجد في المنطقة D عدد محدود من النقاط مثل $z_0, z_1, \ldots z_n$ يكون فيها التابع غير تحليلي، نسمي عادة مثل هذه النقاط بالنقاط الشاذة للتابع f(z) ونقول في هذه الحالة إن التابع $\omega = f(z)$ تحليلي في المنطقة D

باستثناء تلك النقاط الشاذة $z_0, z_1, \dots z_n$ وإذا كانت المنطقة D غير محدودة، فيمكن أن يكون عدد النقاط الشاذة غير محدود.

- إن تعيين النقاط الشاذة لتابع مفروض في المنطقة D يتم بتعيين النقاط التي يكون فيها التابع غير معرف أو غير مستمر أو غير قابل للاشتقاق وكأمثلة على ذلك:

إن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة للتوابع:

$$\sin\frac{3}{z}, \frac{\sin z}{z}, \frac{1}{z^4}, z \cdot \cos\frac{2}{z}, e^{\frac{2}{z}}$$

كما أن النقطة $z = i$ هي نقطة شاذة للتابع:

$$\omega = f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

أما التابع $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ فيملك عدداً غير منته من النقاط الشاذة وهي حلول المعادلة:

$$\sin\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = 2\pi k \Rightarrow z = \frac{1}{2\pi k} \quad ; k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

١ . ٦ . أنواع النقاط الشاذة:

١ . نقاط شاذة معزولة.

٢ . نقاط شاذة غير معزولة.

١ . ٧ . تعريف النقطة الشاذة المعزولة:

نقول عن النقطة z_0 إنها نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ إذا استطعنا إيجاد جوار لها مركزه z_0 ولايحوي نقاطاً شاذة أُخرى سوى z_0 وإذا لم نستطيع إيجاد ذلك الجوار فعندئذٍ نقول إن النقطة z_0 نقطة شاذة غير معزولة.

١ . ٧ . ١ . تعاريف أساسية (أسرة الجوارات):

الجوار ε للنقطة $z_0 \in C$ (في المسافة الإقليدية) هو مجموعة النقاط $z \in C$ الواقعة داخل الدائرة التي نصف قطرها ε ومركزها z_0 أي إن:

$$S(z_0, \varepsilon) = \{|z - z_0| < \varepsilon \; ; z \in C\} \qquad (1)$$

الجوار ε للنقطة $z_0 \in C$ (في المسافة الكروية) هو مجموعة النقاط $z \in \overline{C}$ التي تحقق المتراجحة:

$$S(z_0, \varepsilon) = \{\rho(z, z_0) < \varepsilon \; ; z \in \overline{C}\} \qquad (2)$$

الجوار ε الموخوذ (المثقوب) للنقطة $z_0 \in C$ هو الجوار في (1) باستثناء النقطة z_0 أي إن:

$$S^*(z_0, \varepsilon) = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon \; ; z \in C\} \qquad (3)$$

الجوار ε الموخوذ للنقطة $z_0 \in \overline{C}$ هو الجوار في (2) باستثناء النقطة z_0 أي إن:

$$S^*(z_0, \varepsilon) = \{0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon \; ; z \in \overline{C}\}$$

اختصاراً: الجوار ε للنقطة z_0 هو قرص دائري مفتوح مركزه النقطة z_0 ونصف قطره ε أي إن:

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

والجوار R للنقطة ∞ في $\overline{C}$ هو خارجية قرص دائري مركزه المبدأ ونصف قطره R أي إن: $|z| > R$.

وفي C نحذف ∞ من ذلك الجوار أي إن:

$$R < |z| < \infty$$

ووفقاً لما سبق يمكن إعادة صياغة تعريف النقطة الشاذة المعزولة كما يلي:

نقول عن النقطة $z_0 \in \overline{C}$ إنها نقطة شاذة معزولة (منعزلة) بالنسبة للتابع $f(z)$ إذا وجد جواراً موخوذاً لهذه النقطة بحيث يكون فيه التابع $f(z)$ تحليلياً.

١ . ٨ . تصنيف النقاط الشاذة المعزولة:

١ . نقطة شاذة قابلة للحذف (للإصلاح):

نقول إن النقطة الشاذة المعزولة z_0 للتابع $f(z)$ إنها نقطة شاذة قابلة للحذف إذا كانت النهاية التالية موجودة ومحدودة وغير معدومة أي:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq 0$$

وكأمثلة على ذلك:

١ . بين نوع النقطة $z = i$ بالنسبة للتابع:

$$f(z) = \frac{z - i}{z^2 + 1}$$

إن النقطة $z = i$ هي نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ والأكثر من ذلك:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z - i}{z^2 + 1} = \frac{i - i}{0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نطبق أوبيتال وقبل ذلك لنتذكر نظرية أوبيتال:

إذا كانت نهاية التابع $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ هي من الشكل $\dfrac{0}{0}$ أو $\dfrac{\infty}{\infty}$ فيمكننا تطبيق نظرية أوبيتال وذلك بأن نأخذ نهاية مشتق البسط على مشتق المقام.

بالعودة للتمرين نجد:

$$\lim_{z \to i} \frac{z - i}{z^2 + 1} = \lim_{z \to i} \frac{1}{2z} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \neq 0$$

ومن ثمّ النقطة $z = i$ هي نقطة شاذة معزولة قابلة للحذف.

أما بالنسبة للتابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ فتكون النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة ويكون:

$$\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} = e^{\infty} = \infty$$

ومن ثمَّ تكون النقطة $z = 0$ شاذة معزولة غير قابلة للحذف.

٢ . الأقطاب:

نقول إن النقطة z_0 الشاذة المعزولة بالنسبة للتابع $\omega = f(z)$ أنها قطب من المرتبة n إذا كانت النهاية التالية موجودة ومحدودة ولا تساوي الصفر أي:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

وبشكل خاص إذا كانت $n = 1$ فتسمى النقطة z_0 بقطب بسيط.

١ . ٩ . أمثلة محلولة:

١ . في التابع التالي حدد النقاط الشاذة ونوعها

$$\omega = f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$$

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع السابق هي عبارة عن حلول المعادلة

$$(z-1)(z^2+4) = (z-1)(z-2i)(z+2i) = 0$$

ومنه نجد أن:

$$z_1 = 1 \,, z_2 = 2i \,, z_3 = -2i$$

وهي النقاط الشاذة المعزولة للتابع المعطى أما بالنسبة لنوعها فهي عبارة عن أقطاب بسيطة (يمكن التحقق من ذلك).

٢ . بفرض أن: $\omega = f(z) = \dfrac{2\cos z + z^2 - 2}{z^6}$

حدد النقاط الشاذة للتابع السابق وحدد نوعها.

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع السابق هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^6 = 0 \Rightarrow z = 0$$

وهي النقط الشاذة المعزولة للتابع المعطى أما بالنسبة لنوعها لنأخذ:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^n . f(z) = \lim_{z\to 0} z^n . \frac{2\cos z + z^2 - 2}{z^6}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\cos z + z^2 - 2}{z^{6-n}} = \frac{0}{0}$$

بتطبيق أوبيتال نجد:

$$\lim_{z\to 0} \frac{2\cos z + z^2 - 2}{z^{6-n}} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z + 2z}{(6-n)z^{5-n}} = \frac{0}{0}$$

وبتطبيق أوبيتال مرة أخرى نجد:

$$\lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z + 2z}{(6-n)z^{5-n}} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\cos z + 2}{(6-n)(5-n)z^{4-n}} = \frac{0}{0}$$

وأيضاً أوبيتال نجد:

$$\lim_{z\to 0} \frac{-2\cos z + 2}{(6-n)(5-n)z^{4-n}} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin z}{(6-n)(5-n)(4-n)z^{3-n}}$$

بجعل $n \to 2$ نجد أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{2\sin z}{(6-n)(5-n)(4-n)z^{3-n}} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin z}{4.3.2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{12z} = \frac{1}{12}$$

إذاً نستنتج أن:

$$\lim_{z\to 0} z^2 . \frac{2\cos z + z^2 - 2}{z^6} = \frac{1}{12} \neq 0$$

ومن ثمَّ النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع المعطى وهي عبارة عن قطب مضاعف(قطب من المرتبة الثانية).

٣ . نقطة شاذة أساسية: إذا لم تكن النقطة الشاذة z_0 نقطة شاذة قابلة للحذف للتابع $\omega = f(z)$ أو قطباً من أي مرتبة كانت، فعندئذٍ نسمي النقطة z_0 نقطة شاذة أساسية، بعبارة أخرى تتحقق النهاية:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

وكمثال على ذلك التابع:

$$\omega = \sin\frac{3}{z}$$

وحيث النقطة الشاذة هي $z_0 = 0$ هي نقطة شاذة أساسية بالنسبة للتابع السابق.

٤ . نقاط التفرع: نقطة التفرع هي نقطة شاذة غير معزولة وتعرف بالشكل التالي:

إذا كان التابع $\omega = f(z)$ تابعاً متعدد القيم فإن النقطة z_0 التي يأخذ عندها التابع $\omega = f(z)$ القيمة صفر أو ∞ فعندئذٍ تدعى بنقطة تفرع للتابع $\omega = f(z)$ وكمثال على ذلك:

إن النقطة $z_0 = 2$ هي نقطة تفرع للتابع $\omega = f(z) = \sqrt{z-2}$، وذلك لأنها تحقق تعريف النقطة الشاذة غير المعزولة.

إن النقطتين $z_0 = -2, z_0 = 1$ هما نقطتا تفرع للتابع:

$$f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$$

وبحيث إن هاتين النقطتين هما جذور المعادلة $z^2 + z - 2 = 0$ ويكون التابع عند هاتين النقطتين مساوياً لـ $f(z) = -\infty$ وعندها النقطتان السابقتان هما نقطتا تفرع للتابع اللوغارتمي السابق المتعدد القيم.

٥ . النقاط الشاذة في اللانهاية: إذا وضعنا في التابع $\omega = f(z)$ كل $z = \frac{1}{t}$ أي نجري التحويل $z = \frac{1}{t}$ وحيث t متحول جديد فعندئذٍ نحصل على الشكل:

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

والنقاط الشاذة للتابع الجديد $F(t)$ عند $t = 0$ هي النقاط الشاذة للتابع القديم $f(z)$ عند $z = \infty$ أي في اللانهاية وكمثال على ذلك لنأخذ المثال الآتي:

أوجد النقاط الشاذة للتابع:

$$\omega = f(z) = z^4 - z^3$$

في اللانهاية وبين نوعها.

الحل: نفرض أن $z = \frac{1}{t}$ فنجد:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^3} = \frac{1 - t}{t^4}$$

$t = 0$ هي قطب من المرتبة الرابعة (يمكن التحقق من ذلك) وهذا يعني أن $z = \infty$ هي قطب من المرتبة الرابعة.

١ . ١٠ . متسلسلات لوران وساحة التقارب:

تبين لنا أنه يمكن تمثيل أي دالة تحليلية حول نقطة z_0 بمتسلسلة قوى تسمى متسلسلة تايلور، ولكن ماذا يحدث إذا كانت النقطة z_0 نقطة شاذة للدالة f أي لو كانت f ليست تحليلية عند النقطة z_0؟ هل يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى؟.

المثال التالي يبين أنه يمكن تمثيل تلك الدالة بمتسلسلة، ولكن ليست متسلسلة تايلور حيث تكون قوى المتغير $(z - z_0)$ سالبة وليست موجبة بالضرورة.

مثال محلول:

مثّل الدالة $e^{1/z}$ على صيغة متسلسلة قوى إذا كانت $|z| > 1$.

الحل:

نلاحظ أن الدالة ليست تحليلية عند $z = 0$ وفي المجال المذكور $|z| > 1$ تكون تحليلية، ويمكن أن نستنتج أن $\frac{1}{|z|} < 1$ ومن ثمَّ يمكن إيجاد متسلسلة بتعويض $1/z$ بدلاً من z في متسلسلة تايلور للدالة e^z حيث:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

لينتج أن:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots$$

لاحظ أن قوى المتغير z سالبة وليست موجبة ومن ثمَّ فإن هذه المتسلسلة ليست متسلسلة تايلور حول $z = 0$.

فإذا سمحنا للقوى في متسلسلة القوى أن تكون سالبة فإن الجواب للسؤال المذكور أعلاه بالإيجاب ولكن قطعاً بالنفي إذا اقتصرنا على متسلسلة تايلور (أي القوى الموجبة فقط). وبشكل عام فإن أي دالة f (سواء كانت تحليلية أم غير ذلك عند نقطة معينة) يمكن أن تمثل بمتسلسلة يظهر فيها قوى موجبة أو سالبة أو كلتاهما معاً، وهذه النتيجة تسمى نظرية لوران، وتسمى المتسلسلة متسلسلة لوران. وعلى ضوء ذلك، فإننا نسمي كل متسلسلة تابعية مركبة من الشكل الآتي:

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (1)$$

مركزها النقطة a $(a \neq \infty)$ وأمثالها الثوابت المركبة c_n بمتسلسلة لوران.

تعريف (١): يقال إن متسلسلة لوران (1) متقاربة في النقطة z إذا تقاربت كل من السلسلتين:

$$c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_0^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (2)$$ (الجزء التحليلي)

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \quad (3)$$ (الجزء الرئيسي)

وإذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هو مجموع السلسلة في (2) و (3) على الترتيب فإن مجموع سلسلة لوران في (1) هو:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad (4)$$

نتساءل عن حل المسألة الأساسية الأولى التي تتعلق بنوعية المجموعة النقطية التي فيها تتقارب سلسلة لوران.

المتسلسلة (2) هي متسلسلة قوى، ومن ثم تكون ساحة تقاربها قرصاً دائرياً $|z - a| < R$، وأما المتسلسلة (3) فإنها ليست متسلسلة قوى كونها بأسس سالبة لكن التحويل:

$$\frac{1}{z-a} = t \qquad (5)$$

ينقل هذه المتسلسلة إلى متسلسلة قوى:

$$c_{-1}t + c_{-2}t^2 + \ldots + c_{-n}t^n + \ldots = \sum_1^{\infty} c_{-n}t^n \qquad (6)$$

والمتسلسلة (6) متقاربة في قرص دائري $|t| < \alpha$ وبالتالي المتسلسلة (3) متقاربة في الساحة $\left|\frac{1}{z-a}\right| < \alpha$ أو $|z-a| > \frac{1}{\alpha} = r$.

مما سبق نستنتج أنه إذا كان:

$$r < R \qquad (7)$$

فإن ساحة تقارب سلسلة لوران (1) هي تقاطع القرصين الدائريين $|z - a| < R$ و $|z - a| > r$ أي هي الحلقة الدائرية:

$$D: r < |z-a| < R \qquad (8)$$

واضح أنه في كل نقطة $z \notin \overline{D}$ تكون إحدى السلسلتين (2) و (3) متباعدة. ومن ثم فإن سلسلة لوران (1) متباعدة خارج الساحة المغلقة $\overline{D}$، أما في نقاط حدود الساحة D أي على الدائرتين:

$$|z-a| = r \ , \ |z-a| = R \qquad (9)$$

فإن متسلسلة لوران (1) قد تتقارب وقد تتباعد، بل قد تتقارب في بعض النقاط وتتباعد في بقية النقاط ومسألة التقارب هنا تعالج نقطياً.

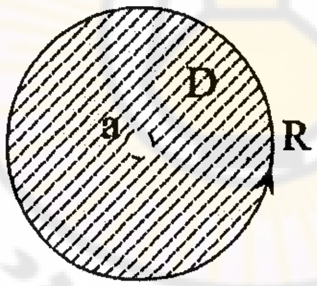
أخيراً إذا كان $r > R$ فإن السلسلة (1) متباعدة لأنه لا يوجد تقاطع مشترك بين القرصين $|z-a| < R$ و $r < |z-a|$.

نشير إلى الحالات الخاصة التالية للحلقة (8):

١ . عندما $r = 0$ و $R \neq +\infty$ تأخذ الحلقة (8) (الشكل 1):

$$D: 0 < |z-a| < R \qquad (10)$$

وهو جوار موخوذ للنقطة a.



الشكل (١)

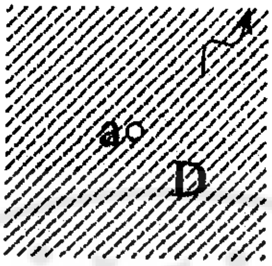
٢ . عندما $r = 0$ و $R = +\infty$ تأخذ الشكل (2):

$$D: 0 < |z-a| < +\infty \qquad (11)$$

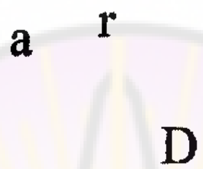
٣ . عندما $z \neq 0$ و $R = +\infty$ نجد (الشكل 3):

$$D: r < |z-a| < +\infty$$

وهو جوار موخوذ لنقطة اللانهاية.



الشكل (٢)



الشكل (٣)

٤ . إذا كانت $a = 0$ نجد أن متسلسلة لوران لها الشكل الآتي:

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n \qquad (12)$$

كيف نحصل على المتسلسلة (12) من المتسلسلة ((1)؟.

نأتي الآن للحالة التي فيها $z = a = \infty$.

تعريف (٢): متسلسلة لوران حول نقطة اللانهاية $z = \infty$ (في جوار موخوذ) هي متسلسلة بقوى $\frac{1}{z}$:

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots c_n z^n + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n \qquad (13)$$

وبالمثل تكون السلسلة (13) متقاربة في النقطة z إذا تقاربت السلسلتان:

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0=\sum_{-\infty}^{0}c_n z^n=\sum_{0}^{\infty}c_{-n}\cdot\frac{1}{z^n} \qquad (14)$$

$$c_1 z+\ldots+c_n z^n+\ldots=\sum_{1}^{+\infty}c_n z^n \qquad (15)$$

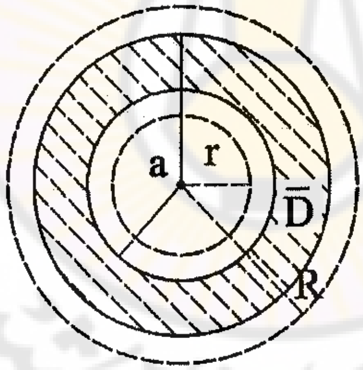
وإذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هو مجموع السلسلتين (14) و (15) على الترتيب فإن مجموع سلسلة لوران (13) هو $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

بمناقشة مماثلة نجد أن ساحة تقارب المتسلسلة (13) لها الشكل:

$$D: +\infty > |z| > R \qquad (16)$$

في كل نقطة $z \notin \overline{D}$ تكون المتسلسلة (13) متباعدة، أما على الحدود $|z| = R$ فإنها قد تتقارب وقد تتباعد ودراسة التقارب هنا تتم نقطياً.

بملاحظة أن متسلسلة لوران هي متسلسلة تابعية فإن المتسلسلة (1) أو (13) تكون متقاربة بانتظام في كل ساحة جزئية مغلقة واقعة ضمن ساحة تقاربها بما في ذلك الحلقة الجزئية $r < r_1 \le |z-a| \le R_1 < R$ لماذا؟ (الشكل ٤).



الشكل (٤)

ملاحظات هامة:

١ . شكلياً متسلسلة لوران حول $a = 0$ هي نفسها متسلسلة لوران حول $z = \infty$ (لاحظ المتسلسلة في (12) هي نفسها المتسلسلة في (13)).

٢ ـ جعلنا الحد الحر c_0 في متسلسلة لوران (1) حول a ($a \neq \infty$) ينتمي لمتسلسلة القوى (2) ذات الأسس الموجبة، بينما c_0 ينتمي في متسلسلة لوران (13) حول $z = \infty$ للمتسلسلة (14) ذات الأسس السالبة. ولهذا الانتماء أهمية عند دراسة النقاط الشاذة.

٣ ـ إذا كانت a ($a \neq \infty$) نقطة عادية وأخذنا متسلسلة لوران حولها فإن هذه المتسلسلة تتطابق مع متسلسلة تايلور حول a لأن حلقة التقارب تنقلب إلى قرص دائري $|z-a| < R$ وتختفي أسس $z-a$ السالبة.

١ . ١١ ـ نظرية لوران (١) (كيفية نشر تابع معطى في متسلسلة لوران ضمن حلقة مفروضة):

مبرهنة (١):

ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً ووحيد التعيين في الحلقة الدائرية كما في الشكل (٥):

$$r_2 \leq |z-a| \leq r_1$$

المحاطة بالدائرتين c_1, c_2. في نقطة z داخل الحلقة الدائرية يمكن نشر هذا التابع وفق القانون:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \;\; ; \;\; r_2 \leq |z-a| \leq r_1$$

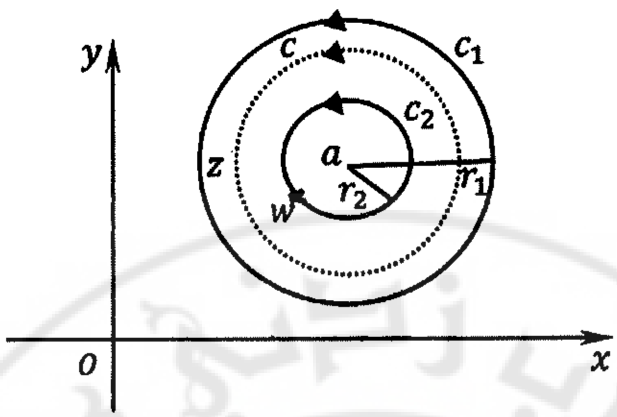
وأمثال النشر c_n , c_{-n} تعطى من العلاقتين:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw$$

حيث c هي الدائرة الواقعة داخل الحلقة الدائرية:

$$r_2 \le |z-a| \le r_1$$



الشكل (٥)

يسمى الجزء $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ بالجزء التحليلي لنشر لوران.

يسمى الجزء $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ بالجزء الرئيسي لهذا النشر، وإن لم يكن الجزء الرئيسي لهذا النشر موجود فإن $f(z)$ تابع تحليلي في المنطقة الدائرية $|z-a| \le r_1$ وبالعكس.

البرهان:

لنفرض أن Z مركز الدائرة γ التي يكون نصف قطرها صغيراً بقدر كافٍ بحيث تقع γ بأكملها داخل c_1 وخارج c_2، وبما أن التابع $\frac{f(w)}{w-z}$ تحليلي من أجل جميع النقاط الواقعة داخل $c1$ وعليها وخارج كل من الدائرتين c_2, γ وعليهما وبحسب صيغة كوشي فإنّ:

$$\int_{c_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{c_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

ومنه نجد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad (1)$$

إن التكامل على المنحني c_1 يحسب كما رأينا في برهان نظرية تايلور تحليل عقدي (١) ونكتب:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (2)$$

حيث:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \ ; \ n=0,1,2,...$$

وبما أن التابع $\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين الدائرتين c, c_1 وعليهما ومنه يكون حسب نظرية كوشي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

أما التكامل على المنحني c_2 فيمكن حسابه كما يلي:

$$-\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(z-a)-(w-a)}=\frac{1}{(z-a)\left[1-\frac{w-a}{z-a}\right]}$$

$$=\frac{1}{z-a}+\frac{w-a}{(z-a)^2}+...+\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{[(z-a)-(w-a)]}$$

وبضرب كل حد من الحدود بالتابع $\frac{1}{2\pi i}f(w)$ والمكاملة على c_2 نجد:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i(z-a)}\int_{c_2}f(w)dw+\frac{1}{2\pi i(z-a)^2}\int_{c_2}(w-a)f(w)dw$$

$$+...+\frac{1}{2\pi i(z-a)^n}\int_{c_2}(w-a)^{n-1}f(w)dw+R_n$$

حيث:

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{[(z-a)-(w-a)]}dw$$

بما أن $\frac{|w-a|}{|z-a|} = k < 1$ على c_2 الشكل (٥) فينتج بالطريقة نفسها التي استخدمناها في برهان نظرية تايلور تحليل عقدي (١) أن:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

وبما أن التابع $(w-a)^{n-1}f(w)$ تحليلي في المنطقة المحصورة بين c_2, c وعليهما فإنه حسب نظرية كوشي يمكن أن نكتب:

$$\int_{c_2}(w-a)^{n-1}f(w)dw = \int_{c}(w-a)^{n-1}f(w)dw$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (3)$$

حيث:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

بتعويض (2) و (3) في (1) نحصل على المطلوب.

١ . ١٢ . وحدانية النشر في متسلسلة لوران:

مبرهنة (٢) . الوحدانية:

نشر التابع النظامي $f(z)$ في متسلسلة لوران ضمن الحلقة $D: r \le |z-a| \le R$ وحيد.

الإثبات: نفرض العكس، أي يوجد نشران للتابع f ضمن الحلقة D:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^n \quad ; \quad z\in D \qquad (1)$$

ولنبين أن $c_n=\tilde{c}_n$ لكل عدد صحيح n.

لنضرب طرفي (1) بالمقدار $(z-a)^{-m-1}$ حيث m عدد صحيح مثبت، نجد أن:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^{n-m-1}=\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^{n-m-1}$$

بما أن المتسلسلتين متقاربتان بانتظام على المجموعة $\gamma:|z-a|=\rho$ ،$r<\rho<R$

فإننا نستطيع المكاملة حداً حداً على γ أي:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\int_\gamma(z-a)^{n-m-1}dz=\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n\int_\gamma(z-a)^{n-m-1}dz$$

وبملاحظة أن: $\int_\gamma(z-a)^{n-m-1}dz=\begin{cases}2\pi i; n-m-1=-1\\ 0; n-m-1\neq-1\end{cases}$ يكون:

$c_m=2\pi i\tilde{c}_m$ أي $c_m=\tilde{c}_m$ وكون m عدد صحيح كيفي فإن $c_n=\tilde{c}_n$ لكل $n\in Z$.

نستنتج أن الأمثال c_n في متسلسلة لوران لتابع مفروض f لا تتعلق بالطريقة التي نحصل فيها على تلك المتسلسلة.

عادة للحصول على متسلسلة لوران يتم توظيف سلاسل ماك لوران للتوابع الأولية إلى جانب الطرق المشروعة الأخرى والمدروسة في كتاب التحليل العقدي (١).

١ . ١٣ . مبرهنة (٣) تقدير الأمثال:

إذا كان f(z) تابعاً نظامياً في الحلقة $D: r_0<|z-a|<R_0$ فإن الأمثال c_n في متسلسلة لوران لـ f ضمن D تحقق متراجحات كوشي:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n}; n \in z, M = \max_{(\gamma)} |f(z)| \qquad (2)$$

حيث: $\gamma: |z-a| = R \;;\; r_0 < R < R_0$

الإثبات:

نقدر c_n باستخدام الصيغة الآتية: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(\xi)|}{|(\xi-a)^{n+1}|}|d\xi| \le \frac{M}{2\pi R^{n+1}}\int_\gamma |d\xi| = \frac{M}{R^n}$$

$; n \in Z$

١ . ١٤ . تعريف (١):

متسلسلة فورييه للتابع المركب بمتحول حقيقي $F(\varphi)$ هي:

$$f(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\varphi n} \qquad (3)$$

١ . ١٥ . العلاقة بين متسلسلة فورييه ولوران:

نقدم العلاقة بين متسلسلة لوران ومتسلسلة فورييه.

إذا كان $F(t)$ تابع قابل للمكاملة على $[0, 2\pi] \subset R$ فإن متسلسلة فورييه لهذا التابع هي:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1 a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\cos nt dt$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\sin nt dt \quad , n = 0,1,\ldots; b_0 = 0$$

بوضع:

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \ , \ \sin nt = \frac{e^{-nt} - e^{-int}}{2i}$$

نجد.

$$\frac{a_0}{2} + \sum\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-int}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int};$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt \quad , \quad n = 0,1,...$$

$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt \quad , \quad n = -1,-2,...$$

والصيغة المركبة لمتسلسلة فورييه للتابع $F(t)$ هي:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \ ; \ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt$$

بوضع $e^{it} = z$, $F(t) = f(e^{it}) = f(z)$ نجد أنها تأخذ الشكل $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ حيث:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{int})e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$$

وعليه فإن متسلسلة فورييه المركبة للتابع $F(t)$ هي متسلسلة لوران للتابع $f(z) = F(t)$ حيث $z = e^{it}$ على دائرة الوحدة $|z| = 1$.

وبالعكس متسلسلة لوران لـ $f(z)$ على دائرة الوحدة هي متسلسلة فورييه لـ $f(e^{it}) = F(t)$ على المجال $[0, 2\pi]$.

نشير إلى أنه في الحالة العامة وحتى لو كانت سلسلة فورييه لـ F متقاربة من F في كل $[0, 2\pi]$ فإنه من أجل متسلسلة لوران المقابلة قد يكون $R = r = 1$ أي إن ساحة التقارب خالية وضمن شروط قاسية على F نضمن أن تكون الساحة غير خالية.

ليكن f تابعاً نظامياً في الحلقة $D:\ \delta_1 < |z| < 1 + \delta_2$ حيث $\delta_2 > 0$، $0\le\delta_1<1$ التي تحتوي دائرة الوحدة $|\zeta| = 1$. عندئذ حسب المبرهنة (١) يمكن نشر f في سلسلة لوران ضمن D:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad z\in D \qquad (4)$$

في الحالة الخاصة عندما تقع z على دائرة الوحدة يكون $z = e^{i\varphi}$ ونحصل على سلسلة فورييه (3) بالشكل الآتي:

$$F(\varphi)=f(e^{i\varphi})=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{i\varphi n} \qquad (5)$$

وبالعكس إذا كان $F(\varphi)$ تابعاً يكتب بالشكل $F(\varphi) = f(e^{i\varphi})$ بحيث إن $f(z)$ تابع نظامي في حلقة تحتوي دائرة الوحدة فإن السلسلة (5) هي متسلسلة فورييه للتابع $F(\varphi)$.

١ . ١٦ . نشر تابع مفروض في متسلسلة لوران حول نقطة شاذة:

تجيب المبرهنة التالية عن الجزء المتبقي من التساؤل المطروح في بداية الفقرة.

١ . ١٦ . ١ . مبرهنة (٤) . لوران:

إذا كان f تابعاً نظامياً في الجوار الموخوذ (الحلقة):

$$K : 0 < |z-a| < r \qquad (1)$$

فعندئذ يكون:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n (z-a)^n \qquad (2)$$

وحيث c_n تعطى بالعلاقة الآتية:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \ ;\ \gamma_\rho : |\xi - a| = \rho \ ;\ 0 < \rho < r$$

(يترك البرهان للقارئ).

١ . ١٧ . مبرهنة (٥) . لوران:

إذا كان f تابعاً نظامياً في الجوار الموخوذ للنقطة ∞:

$$K : R < |z| < +\infty \qquad (3)$$

فإن:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad ; \quad z \in K \qquad (4)$$

كيف تحسب c_n؟

تعريف (٢):

القسم الرئيس f_1 من سلسلة لوران (٢) هو القسم ذو الأسس السالبة، أي:

$$\dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} = \sum_{-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n \qquad (5)$$

والقسم العادي (التحليلي) f_2 لها هو القسم ذو الأسس الموجبة مع الحد الحر c_0

أي:

$$c_0 + c{=}1\,(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (6)$$

والقسم الرئيس f_1 من سلسلة لوران (٤) حول النقطة $z = \infty$ هو القسم ذو الأسس الموجبة، أي:

$$c_1 z + \dots + c_n z^n = \sum_{1}^{\infty} c_n z^n \qquad (7)$$

والقسم العادي f_2 لهذه السلسلة هو القسم ذو الأسس السالبة مع حدها الحر،

أي:

$$\dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 = \sum_{-\infty}^{0} c_n z^n \qquad (8)$$

واضح أنه إذا كان $f_1(z)$، $f_2(z)$ هو مجموع السلسلة (5) و (6) على الترتيب فإن $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ هو مجموع السلسلة (2) في الحلقة (1).

بالمثل إذا كان f_1 و f_2 هو مجموع السلسلة (7) و (8) على الترتيب فإن $f = f_1 + f_2$ هو مجموع السلسلة (4) في الحلقة (3).

لاحظ أننا رمزنا في الحالتين للقسم الرئيس بـ f_1.

نتيجة (١):

القسم الرئيس من سلسلة لوران f_1 حول نقطة شاذة a لتابع مفروض f (يمكن أن تكون $a = \infty$) هو مجموع تلك الحدود الذي لأجله كل حد يؤول إلى اللانهاية عندما $z \to a$ وهذا القسم يمثل تابعاً $f_1(z)$ نظامياً في كل المستوى باستثناء النقطة a، أما القسم العادي f_2 فإنه حاصل طرح القسم الرئيس f_1 من التابع المدروس f:

$$f_2(z) = f(z) - f_1(z) \qquad (9)$$

ويمثل تابعاً نظامياً في النقطة a.

ملاحظة (١):

السبب في تسمية القسم الرئيس بهذا الاسم هو أنه يحدد نوع النقطة الشاذة a التي ننشر التابع f حولها، وبغية التوضيح لنطرح المثال:

مثال (١):

أوجد متسلسلة لوران للتابع $f(z) = P_n(z)$ حول كل من النقاط 0، ∞، 1.

الحل:

نفرض أن: $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$

بما أن التابع $f(z)$ نظامي في النقطة $z = 0$ فإن متسلسلة لوران حول هذه النقطة هي نفسها متسلسلة ماك لوران، أي:

$$f(z) = P_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + 0 \,.\, z^{n+1} + \ldots = P_n(z)$$

وهذه المتسلسلة المنتهية متقاربة في كل المستوى وقسمها الرئيس هو $f_1(z) = 0$ والعادي هو $f_2(z) = P_n(z)$.

بملاحظة أن المتسلسلة السابقة متقاربة في كل المستوى فإنها تمثل في الوقت نفسه متسلسلة لوران حول النقطة $z = \infty$ لكن القسم الرئيس في هذه الحالة هو: $f_1(z) = P_n(z) - c_0$ والقسم العادي هو $f_2(z) = c_0$.

أخيراً $z = 1$ نقطة عادية للتابع $P_n(z)$ ومتسلسلة لوران حول هذه النقطة هي نفسها متسلسلة تايلور، أي:

$$f(z) = P_n(z) = c_0+c_1\,[(z-1)+1]+ c_2\,[(z-1)+1]^2 + \ldots + c_n[(z-1)+1]^m$$

وباستخدام مفكوك ثنائي الحد لنيوتن نجد المطلوب.

١ . ١٨ . أمثلة محلولة:

١ . نفرض أن الدالة f معرفة بالمساواة $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)(z-2)}$

أوجد متسلسلة لوران التي تمثل هذه الدالة في المجالات التالية:

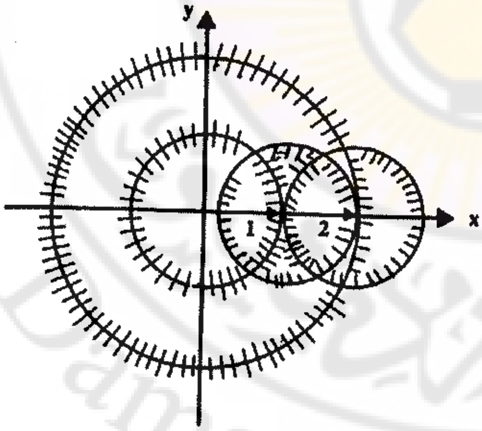
أ . $|z| < 1$

ب . $1 < |z| < 2$

ج . $|z| > 2$

د . $|z - 1| < 1$

هـ . $|z - 2| < 1$



شكل (٦)

الحل:

بتفريق الكسر نحصل على ما يلي:

$$f(z)=\frac{-2}{1-z}+\frac{-2}{z-2}$$

أ . فإذا كانت $|z| < 1$ فإن $\left|\frac{z}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1$ ومن ثمَّ وبالاستفادة من المتسلسلة الهندسية نحصل على ما يلي:

$$f(z)=-2\sum_{n=0}^{\infty}z^{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-2+\frac{1}{2^{n}}\right)z^{n}$$

لاحظ أنه لا يوجد قوى سالبة للمتغير z لأن الدالة تحليلية على هذا المجال ومن ثمَّ تكون المعاملات في الجزء الآخر من متسلسلة لورانت صفراً كي يختفي هذا الجزء من المتسلسلة.

ب . وفي المجال $1<|z|<2$ فإنه إذا كانت $|z|>1$ فإن $\frac{1}{|z|}<1$ وإذا كانت $|z|<2$ فإن $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ وبالاستفادة من المتسلسلة الهندسية ينتج ما يلي:

$$\begin{aligned}
f(z)&=-2\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-z/2}\\
&=\frac{2}{z}\frac{1}{1-1/z}+\frac{1}{1-z/2}\\
&=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}2z^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}z^{n}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n$$

لاحظ أنه يوجد قوى سالبة وأخرى موجبة للمتغير z في هذه المتسلسلة (وذلك لوجود النقطة الشاذة 1 في المنطقة الداخلية لأي كانتور مغلق وبسيط واقع في المجال الحلقي $1 < |z| < 2$).

ج ـ وفي المجال $|z| > 2$ فإن $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ وكذلك يكون $|z| > 1$ وإن $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ وبالاستفادة كذلك من المتسلسلة الهندسية ينتج ما يلي:

$$f(z) = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{-2}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2-2^{n+1}) z^{-n}$$

لاحظ أنه لا يوجد قوى موجبة للمتغير z وذلك لوجود نقطتين شاذتين في المنطقة الداخلية لأي كانتور C في هذا المجال $|z| > 2$. الأولى شاذة للجزء الأول من الدالة والثانية شاذة للجزء الثاني منها.

د ـ وفي المجال $|z - 1| < 1$ فإن علينا أن نجد المتسلسلة حول $z_0 = 1$ وتكون القوى بدلالة $(z - 1)$ لذلك نجد أن:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{1-(z-1)}$$

$$= 2(z-1)^{-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$$

لاحظ بما أن الدالة $\frac{-2}{z-2}$ تحليلية عند $z = 1$، فإنها أنتجت الجزء الموجب من متسلسلة لوران. ويوجد فقط حد واحد ذو قوة سالبة.

هـ . وفي المجال $|z - 2| < 1$ فإن علينا أن نجد المتسلسلة حول $z_0 = 2$ وتكون القوى بدلالة $z - 2$ لذلك نجد أن:

$$f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-2}$$
$$= \frac{2}{1+(z-2)} - \frac{2}{z-2}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^n - 2(z-2)^{-1}$$

لاحظ كذلك أن الجزء السالب حد واحد فقط ظهر من الدالة $\frac{2}{z-2}$ التي لا تكون تحليلية عند $z = 2$ والجزء الموجب ظهر من الدالة $\frac{2}{z-1}$ التي تكون تحليلية عند $z = 2$.

٢ . مثّل الدالة f بمتسلسلة لوران حيث إن:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4}$$

في المجالات التالية:

أ . $0 < |z| < 1$ ب . $|z - 1| < 1$.

الحل:

أ . بما أن النقطة $z = 0$ شاذة للدالة f وتقع في المنطقة الداخلية لأي كانتور واقع في المجال $0 < |z| < 1$ فإنه بإيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة e^{2z} نستنتج أن:

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!} = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n$$
$$= \frac{1}{z^4}\left\{1 + 2z + \frac{4}{2!}z^2 + \frac{8}{3!}z^3 + \dots\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{3z}\right)+\left(\frac{16}{4!}+\frac{32}{5!}z+\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{3z}\right)+\frac{2^4}{4!}\left(1+\frac{2}{5}z+\frac{2^2}{6\times 5}z^2+\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{3z}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+4}z^n}{(n+4)!}$$

لاحظ أن الجزء ذا القوى السالبة مكون من أربعة حدود فقط.

ب . أما في المجال $|z - 1| < 1$ فعلينا أن نجد تمثيلاً لكل من الدالتين e^{2z} و $\frac{1}{z^4}$ بمتسلسلة عند $z = 1$ ثم نجد حاصل ضرب كوشي لهما.

وبالاشتقاق المتكرر للدالة e^{2z} فإن $g^n(1) = 2^n e^2 , n = 0,1,2,\ldots.$ فتكون:

$$g(z)=e^{2z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n(1)}{n!}(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n e^2}{n!}(z-1)^n$$

لجميع قيم z.

أما الدالة $h(z)=\frac{1}{z^4}$ فيمكن إيجاد المتسلسلة التي تمثلها بالاشتقاق المتكرر للمتسلسلة التي تمثل $\frac{1}{z}$ وذلك لأن:

$$\left(\frac{1}{z}\right)'''=-6z^{-4},$$

أي إن:

$$\frac{1}{z^4}=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z}\right)$$

ولإيجاد المتسلسلة التي تمثل الدالة $\frac{1}{z}$ بدلالة $z - 1$ يمكن ملاحظة أن:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n$$

ومن ثمَّ فإن:

$$h(z) = \frac{1}{z^4} = -\frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n\right)'''$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+4}(n+3)(n+2)(n+1)(z-1)^n$$

ومن ذلك:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}(z-1)^n \quad , |z-1| < 1$$

ولإيجاد المتسلسلة التي تمثل $f(z) = e^{2z}/z^4$ نجد حاصل ضرب كوشي للمتسلسلتين $g(z)$ و $h(z)$ الذي يكون تقاربياً للدالة f على المجال المشترك بينهما وهو $|z-1| < 1$ ومن ذلك يكون:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n (z-1)^n \quad , \ |z-1| < 1$$

حيث إن:

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n-k}\beta_k \ ,$$

$$\alpha_n = \frac{2^n e^2}{n!}$$

وكذلك:

$$\beta_n = \frac{(-1)^n}{6}(n+3)(n+2)(n+1)$$

ولمزيد من الوضوح نجد الحدود الثلاثة الأولى من γ_n. وهي $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 = e^2$ وكذلك:

$$\gamma_1 = \alpha_1\,\beta_0 + \alpha_0\,\beta_1 = 2e^2 - e^2\,4 = -2\,e^2\,,$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \alpha_2\,\beta_0 + \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_0\,\beta_2\\ &= 2e^2 + 2e^2\,(-4) + 10\,e^2\\ &= 4e^2\,, \ldots\end{aligned}$$

وهكذا.

٣ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $\dfrac{(z^2-2z+3)}{(z-2)}$ على المنطقة $|z-1| > 1$.

الحل:

لاحظ أن مركز هذه المنطقة هو $z_0 = 1$ وأنها لا تشمل النقطة الشاذة $z = 2$ لذلك نعيد كتابة $\dfrac{1}{z-2}$ حتى يمكن تطبيق المتسلسلة الهندسية الناتجة في تلك المنطقة المعينة:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}$$

وعليه للقيم $\left|\dfrac{1}{z-1}\right| < 1$ يكون:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^j}\\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \ldots\end{aligned}$$

وبإعادة كتابة البسط $(z^2 - 2z + 3)$ بدلالة قوى $z - 1$ نجد أن:

$$z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 0\,.\,(z-1) + 2 = (z-1)^2 + 2$$

وعليه:

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2}=\left[(z-1)^2+2\right]\cdot\left[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+....\right]$$

$$=\left[(z-1)+1+\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}+...\right]+\left[\frac{2}{(z-1)}+\frac{2}{(z-1)^2}+..\right]$$

$$=(z-1)+1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{3}{(z-1)^j}$$

٤ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ في:

أ . المنطقة $|z|<1$.

ب . المنطقة $1<|z|<2$.

ج . المنطقة $|z|>2$.

الحل:

باستخدام الكسور الجزئية نكتب:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

الآن، كل منطقة تناسبها طريقة خاصة بها للحصول على المتسلسلات المتقاربة:

أ . لقيم $|z|<1$:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^j=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{2^{j+1}}\qquad(1)$$

و

$$\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{1-z}=-\sum_{j=0}^{\infty}z^j\qquad(2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{j+1}}+1\right)z^j = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\dots$$

(ب) لقيم $1 < |z| < 2$ تبقى المعادلة (1) صحيحة، ولكن لدينا:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}} \qquad (3)$$

وعليه:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{2^{j+1}} - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}} = \dots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \dots$$

ج. لقيم $|z| > 2$ المعادلة (3) تكون:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{z^{j+1}}$$

ومنه:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j-1}{z^{j+1}} = \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\dots$$

٥ . ما هي متسلسلة لوران حول $z = 0$ للدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \sin z & z \neq 0 \\ 5 & z = 0 \end{cases}$$

(يترك للقارئ)

ملاحظة:

استخدمنا الطريقة المباشرة في التمارين السابقة لإيجاد متسلسلة لوران وهي طريقة مختصرة، أما الآن فإننا سنستخدم طريقة التكاملات في إيجاد منشور لوران، وذلك من خلال بعض الأمثلة الآتية:

٦ . أوجد منشور لوران للدالة المعطاة بالشكل الآتي:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

وذلك في المنطقة $1<|z|<2$.

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ المعطى هي حلول المعادلة:

$$(z-1)\,(z-2)=0 \Rightarrow z_1=1\;,\; z_2=2$$

وهي النقاط الشاذة للتابع المعطى وإن متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ هي:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$$

ومعاملات المتسلسلتين السابقتين تعطيان بالقوانين الآتية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}dz\;;n>0$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{n+1}}\;;n\geq 0$$

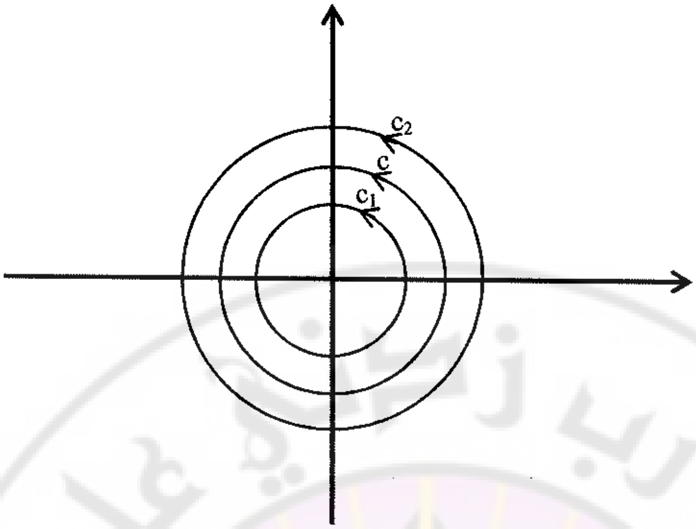
وأما C فهي دائرة مركزها الصغر ونصف قطرها $1<r<2$ والرسم يوضح ذلك:

إن التابع $f(z)$ هو $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ لنقوم بتفريق الكسر.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}\equiv\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}\Rightarrow$$

بتوحيد المقامات والمطابقة نحصل على:

$A=-1\;,\;B=1$



شكل (٧)

ومن ثمَّ:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{-n+1}} \quad ; \quad n \geq 1$$

إن التابع المستكمل أي $\frac{1}{(z-1)(z-2)z^{-n+1}}$ يفقد تحليليته في الساحة C في النقطة $z = 1$.

وباستخدام صيغة كوشي (1) للتكامل السابق نجد:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{(z-2)z^{-n+1}}}{(z-1)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i \cdot \frac{1}{z^{-n+1}(z-2)}\right]_{z=1} = -1$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$c_{-n} = -1 \;\; ; \;\; n \geq 1$$

وقبل المتابعة بحل التمرين نتذكر صيغ كوشي التكاملية:

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في المنطقة D التي يحيط بها المنحني البسيط المغلق C وكانت $a \in C$ فإنه يكون:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a) \qquad (1)$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \Rightarrow \qquad (2)$$

لنأخذ C_0 , C_1 دائرتين غير متقاطعتين مركز الدائرة الأولى $a_0 = 0$ ومركز الدائرة الثانية $a_1 = 1$ وتقعان كلياً داخل الدائرة C(التكامل على منحنٍ خارجي يساوي مجموع التكاملات على منحنيات داخلية(نتيجة من نظرية كوشي تحليل عقدي(١)))

وبالتالي يكون:

$$\int_C = \int_{C_0} + \int_{C_1} \quad \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)z^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-2)z^{n+1}}}{(z-1)} dz$$

وباستخدام صيغة كوشي (2) للتكامل الأول وصيغة كوشي (1) للتكامل الثاني نجد:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{2\pi i}{n!}\left[\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)^{(n)}\right]_{z=0}\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\left[\frac{1}{z^{n+1}(z-2)}\right]_{z=1}\right)$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)^{(n)}\right]_{z=0}+\left[\frac{1}{z^{n+1}(z-2)}\right]_{z=1} =$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)^{(n)}\right]_{z=0} -1$$

بالاستفادة من تفريق الكسر نجد:

$$\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)^{(n)}\right]_{z=0} -1$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-2}\right)^{(n)}\right]_{z=0} -1 =$$
$$\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)}\right]_{z=0}+\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{z-2}\right)^{(n)}\right]_{z=0} -1$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}+\frac{(-1)^n.n!}{(z-2)^{n+1}}\right]_{z=0} -1$$
$$=1+\frac{(-1)^n}{(-2)^{n+1}}-1=-\frac{1}{2^{n+1}}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$c_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \quad ; n \geq 0$$

و من ثمَّ نشر لوران للتابع $f(z)$ هو:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

على المنطقة $1 < |z| < 2$

٧ . أوجد نشر لوران للدالة

$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ وذلك في الحلقة الدائرية $0 < |z-1| < 2$

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي حلول المعادلة:

$$(z^2-1)^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -1$$

إن التابع $f(z)$ هو تابع تحليلي داخل الحلقة $0 < |z-1| < 2$ ومن ثمَّ من أجل نقطة z من الحلقة السابقة وحسب مبرهنة لوران يمكن تمثيل التابع $f(z)$ بمتسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-1)^n$$

ويعطى معامل متسلسلة لوران بالقانون التالي:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{(z^2-1)^2}}{(z-1)^{n+1}}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}}{(z-1)^{n+1}}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$$

وبحيث إن C منحني يقع داخل الحلقة المعطاة بفرضية التمرين المعطى.

لنميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كان $n + 3 \leq 0$ ومن ثمَّ نجد أن حسب نظرية كوشي:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}=0 \quad ; n\leq -3$$

حسب مبرهنة كوشي يكون التابع $\dfrac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$ تحليلي من أجل جميع النقاط الواقعة داخل C ومن ثمَّ يكون التكامل معدوم، ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$c_n=0 \quad ; \quad n\leq -3$$

الحالة الثانية: إذا كان $n+3>0$ أي $n>-3$ فعندها يفقد التابع تحليليته داخل C في النقطة $z=1$ ومن ثمَّ نجد:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}}dz$$

وباستخدام صيغة كوشي الثانية نجد أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}}dz=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{(n+2)!}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)^{(n+2)}\right]_{z=1}$$

$$=\left[\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)^{(n+2)}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{(-1)^n.(n+3)!}{(z+1)^{n+4}}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{1}{(n+2)!}.\left[\frac{(-1)^n.(n+3).(n+2)!}{(z+1)^{4+n}}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{4+n}}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_n=\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{4+n}} \qquad ; n\geq -2$$

ومن ثمَّ تكون سلسلة لوران للتابع $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{4+n}} . (z-1)^n$$

٨ . انشر الدالة $f(z) = \frac{1}{z-a}$

وذلك في كل من المنطقتين التاليتين:

١ . $|z| < |a|$

٢ . $|z| > |a|$ وبحيث أن $|a| \neq 0$

الحل:

إن النقطة $z = a$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ والتابع $f(z)$ هو تابع تحليلي داخل الدائرة $|z| = |a|$ وخارجها ويمكن نشر التابع السابق بمتسلسلة قوى صحيحة

نعلم أن:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots \qquad ; \ |u| < 1$$

فإذا استفدنا من هذا النشر فنحصل على النشر في كل من المنطقتين المذكورتين:

١ . $|z| < |a|$ ومنه نجد أن $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{z-a} = \frac{1}{-a\left(1-\frac{z}{a}\right)} \ ; \ u = \frac{z}{a}$$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a} . \frac{1}{1-u} = \frac{-1}{a}\left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \cdots \frac{z^n}{a^n} + \cdots\right)$$

$$= \frac{-1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

٢ . $|z| > |a|$ ومنه نجد أن $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ وبالعودة إلى $f(z)$ نجد:

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-u}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\cdots\frac{a^n}{z^n}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)^n}{z^{n+1}}$$

٩ . حدد الحلقات الدائرية للتابع التحليلي المعطى بالشكل:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}$$

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ السابق هي حلول المعادلة:

$$z^2-1=0 \Rightarrow z=1\,, z=-1$$

إن الحلقات الدائرية التي يكون فيها التابع $f(z)$ السابق تحليلياً هي عبارة عن 5 حلقات وهي:

١ . $D_1 :\ 0<|z+1|<2$

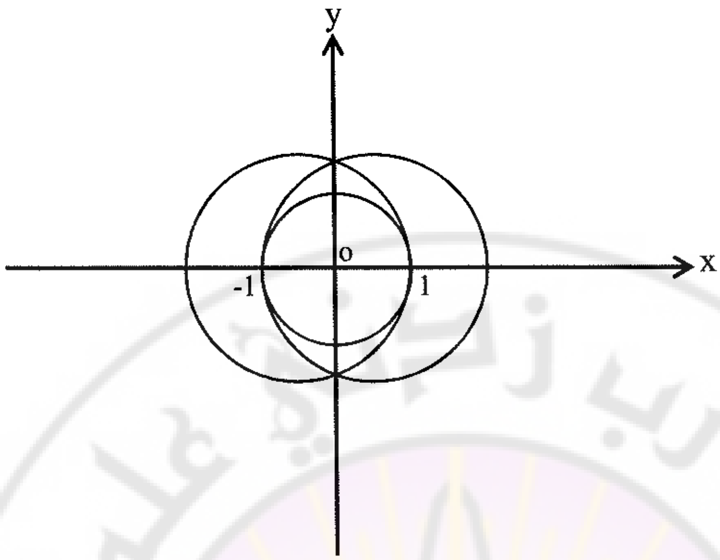
٢ . $D_2 :\ 0<|z-1|<2$

٣ . $D_3 :\ 1<|z|<\infty$

٤ . $D_4 :\ 2<|z-1|<\infty$

٥ . $D_5 :\ 2<|z+1|<\infty$

ولعل الرسم التالي يوضح ذلك:



الشكل (٨)

١٠ . استخدم الطريقة المباشرة في إيجاد منشور لوران للدالة f(z) المعطاة بالشكل الآتي:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$$

وذلك في الحلقة الدائرية $0 < |z-1| < 2$.

الحل:

يكتب التابع المفروض f(z) بالشكل الآتي:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}$$

إن الحدين الأول والثاني في الطرف الأيمن محققان للشكل المطلوب، ولكي نحصل على النشر المطلوب علينا كتابة (نشر) الحدين الثالث والرابع في قوى $(z-1)$)، وبغية ذلك لنضع الحد الثالث كما يلي:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right]$$

أما بالنسبة للحد الرابع فيكون:

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{(z+2-1)^2}=\frac{1}{[2+(z-1)]^2}$$

$$=\frac{1}{\left\{2\left[1+\frac{z-1}{2}\right]\right\}^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-2\frac{z-1}{2}+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3-+\ldots\right]$$

وبالتعويض نجد:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}+$$

$$+\frac{1}{8}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots..\right]$$

$$+\frac{1}{16}\left[1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+\ldots\right]$$

أو:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\dots$$

١١ . بين طبيعة النقطة $z=-1$ للدالة

$$f(z)=\cos\frac{z}{z+1}$$

وأوجد نشر لوران للدالة $f(z)$.

الحل: نلاحظ أن:

$$\lim_{z\to -1}\cos\frac{z}{z+1}= \text{غير موجودة}$$

ومن ثمّ النقطة $z=-1$ حسب تعريف النقطة الشاذة الأساسية هي نقطة شاذة أساسية.

لنكتب $f(z)$ بالشكل:

$$\begin{aligned}f(z)&=\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)=\cos\left(\frac{z+1-1}{z+1}\right)=\cos\left(\frac{z+1}{z+1}-\frac{1}{z+1}\right)\\&=\cos\left(1-\frac{1}{z+1}\right)\\&=\cos1.\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)+\sin1.\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)\end{aligned}$$

وبالاستفادة من نشر التابعين $\sin z$, $\cos z$ مع العلم أن:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}$$

وبتبديل في المنشورين السابقين كل z بـ $\frac{1}{z+1}$ نجد:

$$\cos 1 . \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) + \sin 1 . \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

$$= \cos 1 . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} . \frac{1}{(z+1)^{2n}}$$

$$+ \sin 1 . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} . \frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$$

$$= \cos 1 + \cos 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} . \frac{1}{(z+1)^{2n}} + \sin 1 . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} . \frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$$

نلاحظ أن $c_0 = \cos 1$ هو القسم العادي أما البقية فهي عبارة عن القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران والقسم الرئيسي لمتسلسلة لوران هو عبارة عن متسلسلة غير منتهية.

١٢ . باستخدام طريقة التكاملات أوجد النشر بمتسلسلة لوران للتابع:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

طلب (١): وذلك في الحلقة $3 < |z| < \infty$

طلب (٢): إن أمكن في الحلقة $2 < |z| < \infty$

طلب (٣): في الحلقة $2 < |z| < 3$

الحل:

١ . إن التابع $f(z)$ تحليلي في الحلقة $3 < |z| < \infty$ ومن ثمَّ حسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع $f(z)$ السابق بمتسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

وبحيث إن c_{-n} , c_n معاملات المتسلسلتين السابقتين ويمكن إيجادهما حسب مبرهنة لوران ويعطيان بالعلاقتين الآتيتين:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \qquad ; \; n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \qquad ; \; n \geq 0$$

وحيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $\infty > |z| > 3$ التي مركزها مساوي للصفر ونصف قطرها هو $r > 3$.

ومن ثمَّ لنوجد هذه المعاملات:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z^2 - 5z + 6).\, z^{-n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-2)(z-3).\, z^{-n+1}}dz \qquad ; \quad n \geq 1$$

نلاحظ أن التابع المستكمل أي $\frac{1}{(z^2 - 5z + 6)\cdot z^{-n+1}}$ يفقد تحليليته في الساحة المحدودة والمغلقة C وذلك في النقطتين:

$$z = 2\,, z = 3$$

نأخذ C_2 دائرة مركزها $z = 2$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذة $z = 2$ بدائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ.

نأخذ C_3 دائرة مركزها $z = 3$ ونصف قطرها صغير جداً، أي نحيط النقطة الشاذة $z = 3$ بدائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ وبحيث إن هاتين الدائرتين لا تتقاطعان بعضهما مع بعض ولا تتقاطعان مع C وتقعان بأكملهما داخل C.

وحسب النتائج التي حصلنا عليها من مبرهنة كوشي نجد أن (التكامل على منحنٍ خارجي يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية).

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-2)(z-3).z^{-n+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-3).z^{-n+1}}}{z-2} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{\frac{1}{(z-2).z^{-n+1}}}{z-3} dz$$

وباستخدام صيغة كوشي الأولى للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{1}{(z-3).z^{-n+1}}\right]_{z=2}\right] + \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{1}{(z-2).z^{-n+1}}\right]_{z=3}\right] \Rightarrow$$

$$c_{-n} = \frac{1}{(-1).(2)^{-n+1}} + \frac{1}{3^{-n+1}} = 3^{n-1} - 2^{n-1} \quad ; n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-2)(z-3)z^{n+1}} dz \quad ; \quad n \geq 0$$

إن التابع المستكمل أي $\frac{1}{(z-2)(z-3)z^{n+1}}$ يفقد تحليليته في الساحة المحدودة والمغلقة C وذلك في النقاط $z = 0, z = 2, z = 3$ ومن ثمَّ:

نأخذ C_0 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذة $z = 0$ بدائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ.

نأخذ C_2 دائرة مركزها $z = 2$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذ$z = 2$ بدائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ.

نأخذ C_3 دائرة مركزها $z = 3$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذة $z = 3$ بدائرة وبحيث إن هذه الدوائر لا يتقاطع بعضها مع بعض ولا تتقاطع مع C وتقع بأكملهما داخل C.

وحسب النتائج التي حصلنا عليها من مبرهنة كوشي نجد أن (التكامل على منحنٍ خارجي يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية).

ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\frac{1}{(z-2)(z-3)}}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-3)z^{n+1}}}{(z-2)} dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{\frac{1}{(z-2)z^{n+1}}}{(z-3)} dz$$

وباستخدام صيغة كوشي الثانية للتكامل الأول وصيغة كوشي الأولى للتكاملين الثاني والثالث نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{n!}.\left[\left(\frac{1}{(z-2)(z-3)}\right)^{(n)}\right]_{z=0}\right] + \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{1}{(z-3)z^{n+1}}\right]_{z=2}\right]$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{1}{(z-2)z^{n+1}}\right]_{z=3}\right]$$

ومن ثمَّ نجد:

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{(z-2)(z-3)}\right)^{(n)}\right]_{z=0} + \frac{1}{(-1).\,2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}; n \geq 0$$

لنقوم بتفريق الكسر:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \equiv \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

بعد توحيد المقامات والمطابقة نجد أن:

$$A = -1 \quad , \qquad B = 1$$

ومن ثمَّ:
$$f(z) = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

وبالعودة نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}\right)^{(n)}\right]_{z=0} + \frac{1}{(-1).\,2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{n!}{(2-z)^{n+1}} + \frac{(-1)^n . n!}{(z-3)^{n+1}}\right]_{z=0} + \frac{1}{(-1). 2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(-3)^{n+1}} + \frac{1}{(-1). 2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} = 0$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_n = 0 \quad ; \; n \geq 0$$

وتكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $\infty > |z| > 3$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^{n-1} - 2^{n-1})}{z^n}$$

٢ . نلاحظ أن التابع $f(z)$ هو تابع يفقد تحليليته في النقطة $z = 3$ في الحلقة $\infty > |z| > 2$ وبالتالي مبرهنة لوران لم تتحقق، ومن ثمَّ لا يمكن نشر التابع $f(z)$ بسلسلة لوران.

٣ . إن التابع $f(z)$ تابع تحليلي في الحلقة $3 > |z| > 2$ ومن ثمَّ يمكن نشر التابع $f(z)$ بسلسلة لوران من الشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

وبحيث إن c_n , c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين ويمكن إيجادهما حسب مبرهنة لوران ويعطيان بالعلاقة:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz \qquad ; \; n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \qquad ; \; n \geq 0$$

وحيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $3 > |z| > 2$ التي مركزها مساوي للصفر ونصف قطرها هو $2 < r < 3$.

ومن ثمَّ لنوجد هذه المعاملات:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z^2-5z+6).z^{-n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-2)(z-3).z^{-n+1}}dz \quad ; \quad n \geq 1$$

نلاحظ أن التابع المستكمل $\frac{1}{(z^2-5z+6).z^{-n+1}}$ يفقد تحليليته في الساحة المحدودة والمغلقة C وذلك في النقطة: $z = 2$.

نأخذ C_2 دائرة مركزها $z = 2$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذة $z = 2$ بدائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ. تقع داخل C ولا تتقاطع معها.

(التكامل على منحنٍ خارجي يساوي إلى التكامل على المنحني الداخلي).

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-2)(z-3).z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-3).z^{-n+1}}}{z-2}dz$$

وباستخدام صيغة كوشي الأولى نجد أن:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{1}{(z-3).z^{-n+1}}\right]_{z=2}\right] \Rightarrow$$

$$c_{-n} = \frac{1}{(-1).(2)^{-n+1}} = -2^{n-1} \quad ; n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-2)(z-3)z^{n+1}}dz \quad ; \quad n \geq 0$$

إن التـابع المسـتكمل أي $\frac{1}{(z-2)(z-3)z^{n+1}}$ يفقـد تحليليتـه في السـاحة المحدودة والمغلقة C وذلك في النقطتين $z = 0, z = 2$ ومن ثمَّ:

نأخذ C_0 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذة $z = 0$ بدائرة مركزها $z = 0$ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ.

نأخذ C_2 دائرة مركزها $z = 2$ ونصف قطرها صغير جداً أي نحيط النقطة الشاذة $z = 2$ بدائرة مركزها تلك النقطة ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ.

وبحيث إن هاتين الدائرتين لا يتقاطع بعضهما مع بعض ولا تتقاطعان مع C وتقعان بأكملهما داخل C (التكامل على منحنٍ خارجي يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية).

ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\frac{1}{(z-2)(z-3)}}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-3)z^{n+1}}}{(z-2)} dz$$

وباستخدام صيغة كوشي الثانية للتكامل الأول وصيغة كوشي الأولى للتكامل الثاني نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{n!}.\left[\left(\frac{1}{(z-2)(z-3)}\right)^{(n)}\right]_{z=0}\right] + \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{1}{(z-3)z^{n+1}}\right]_{z=2}\right]$$

ومن ثمَّ نجد:

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{(z-2)(z-3)}\right)^{(n)}\right]_{z=0} + \frac{1}{(-1).\,2^{n+1}} \quad ; n \geq 0$$

وبالاستفادة من تفريق الكسر:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

وبالعودة نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}\right)^{(n)}\right]_{z=0} + \frac{1}{(-1).\,2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{n!}{(2-z)^{n+1}} + \frac{(-1)^n.\,n!}{(z-3)^{n+1}}\right]_{z=0} + \frac{1}{(-1).\,2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(-3)^{n+1}} + \frac{1}{(-1).\,2^{n+1}} = -\frac{1}{3^{n+1}} \;; n \geq 0$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_n = -\frac{1}{3^{n+1}} \quad ; \quad n \geq 0$$

وتكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $3 < |z| < 3$ هي:

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

تعريف الدالة الميرومورفية:

هي دالة جميع نقاطها الشاذة عبارة عن أقطاب فقط.

١٣ . لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$$

المطلوب:

١ . هل هذه الدالة هي دالة ميرومورفية؟

٢ . أوجد نشر لوران في الحلقة $1 < |z| < 2$

الحل:

١ . إن النقاط الشاذة للدالة المعطاة هي حلول المعادلة

$$(z^2-4)(z^2-1) = 0 \Rightarrow z^2 - 4 = 0$$
$$z^2 - 1 = 0$$

ومن ثمَّ نستنتج أن النقاط الشاذة هي:

$$z_1 = 1 , z_2 = -1 , z_3 = 2 , z_4 = -2$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة بالنسبة للتابع المعطى، وهي أيضاً عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ الدالة $f(z)$ هي دالة ميرومورفية، لأنه حسب تعريف الدالة الميرومورفية هي دالة نقاطها الشاذة هي عبارة عن أقطاب فقط.

٢ . إن التابع $f(z)$ تحليلي في الحلقة $2 > |z| > 1$ ومن ثمَّ حسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع $f(z)$ السابق بمتسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

وبحيث إن c_n , c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين ويمكن إيجادهما حسب مبرهنة لوران ويعطيان بالعلاقة:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz \quad ; \quad n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad ; \quad n \geq 0$$

وحيث C هو عبارة عن منحنٍ الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 > |z| > 1$ التي مركزها مساوٍ للصفر ونصف قطرها هو: $1 < r < 2$.

ومنه يكون:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(z^2 - 4)(z^2 - 1).\, z^{-n+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1).\, z^{-n+1}} dz \quad ; \quad n \geq 1$$

نلاحـــظ أن التـــابع المســـتكمل أي $\dfrac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1).z^{-n+1}}$

يفقد تحليليته في الساحة المحدودة والمغلقة C وذلك في النقطتين:

$$z = 1 \,, z = -1$$

نأخذ C_1 دائرة مركزها $z = 1$ ونصف قطرها صغير جداً

نأخذ C_2 دائرة مركزها $z = -1$ ونصف قطرها صغير جداً وبحيث إن هاتين الدائرتين لا يتقاطع بعضهما مع بعض ولا تتقاطعان مع C وتقعان بأكملهما داخل C.

ومنه يكون:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1).z^{-n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\dfrac{z}{(z-2)(z+2)(z+1).z^{-n+1}}}{(z-1)}dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\dfrac{z}{(z-2)(z+2)(z-1).z^{-n+1}}}{(z+1)}dz$$

وباستخدام صيغة كوشي الأولى للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{z}{(z-2)(z+2)(z+1).z^{-n+1}}\right]_{z=1}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1).z^{-n+1}}\right]_{z=-1}\right] \Rightarrow$$

$$c_{-n} = \frac{1}{(-1).(3).(2).(1)^{-n+1}} - \frac{1}{(-3).(1).(-2)(-1)^{-n+1}}$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^n \quad ; n \geq 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \qquad ; \; n \geq 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1).z^{n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1).z^{n+1}}dz \;\; ; \; n \geq 0$$

نلاحـــظ أن التـــابع المســـتكمل أي $\dfrac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1).z^{-n+1}}$

يفقد تحليليته في الساحة المحدودة والمغلقة C وذلك في النقاط:

$$z = 1 \,, z = -1 \,, z = 0$$

نأخذ C_0 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ.

نأخذ C_1 دائرة مركزها $z = 1$ ونصف قطرها صغير جداً .

نأخذ C_2 دائرة مركزها $z = -1$ ونصف قطرها صغير جداً وبحيث إن الدوائر السابقة لا يتقاطع بعضهما مع بعض ولا تتقاطع مع C وتقع بأكملهما داخل C.

ومنه يكون:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1).z^{n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{\overline{(z-2)(z+2)(z+1).(z-1)}^{\,z}}{z^{n+1}}dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\overline{(z-2)(z+2)(z+1).z^{n+1}}^{\,z}}{(z-1)}dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\overline{(z-2)(z+2)(z-1).z^{n+1}}^{\,z}}{(z+1)}$$

وباستخدام صيغة كوشي الثانية للتكامل الأول وصيغة كوشي الأولى للتكاملين الثاني والثالث نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi i}{n!}.\left[\left(\frac{z}{(z-2)(z+2)(z+1).(z-1)}\right)^{(n)}\right]_{z=0}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{z}{(z-2)(z+2)(z+1).z^{n+1}}\right]_{z=1}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i.\left[\frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1).z^{n+1}}\right]_{z=-1}\right] \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{n!}.\left[\left(\frac{z}{(z-2)(z+2)(z+1).(z-1)}\right)^{(n)}\right]_{z=0}$$

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(-1)^{-n} \quad ; n \geq 0$$

نلاحظ أنه لا بد من تفريق الكسر التالي:

$$\frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1)} \equiv \frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{z+1}$$

طريقة سريعة لتفريق الكسر:

إذا ضربنا الكسر السابق بالمقدار $(z-2)$ وتعويض بالكسر الناتج كل $z=2$ نحصل على قيمة A.

إذا ضربنا الكسر السابق بالمقدار $(z+2)$ وتعويض بالكسر الناتج كل $z=-2$ نحصل على قيمة B.

إذا ضربنا الكسر السابق بالمقدار $(z-1)$ وتعويض بالكسر الناتج كل $z=1$ نحصل على قيمة C.

إذا ضربنا الكسر السابق بالمقدار $(z+1)$ وتعويض بالكسر الناتج كل $z=-1$ نحصل على قيمة D.

ومنه نحصل على:

$$A = B = \frac{1}{6} \quad , \quad C = D = \frac{-1}{6}$$

ومن ثمَّ يكون لدينا الشكل:

$$\frac{z}{(z-2)(z+2)(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{1}{6}}{z-2} + \frac{\frac{1}{6}}{z+2} - \frac{\frac{1}{6}}{z-1} - \frac{\frac{1}{6}}{z+1}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_{-n} = \frac{1}{n!}\cdot\left[\left(\frac{z}{(z-2)(z+2)(z+1).(z-1)}\right)^{(n)}\right]_{z=0} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{-n} =$$

$$c_{-n} = \frac{1}{6.(n!)}\cdot\left[\left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)^{(n)}\right]_{z=0} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{-n}$$

$$=$$

$$\frac{1}{6.(n!)}\cdot\left[\left(\frac{1}{z-2}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{z+2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{z-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{z+1}\right)^{(n)}\right]_{z=0}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{-n}$$

$$= \frac{1}{6.(n!)}\cdot\left[\frac{(-1)^n.n!}{(z-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n.n!}{(z+2)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.n!}{(z+1)^{n+1}}\right]_{z=0}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{-n}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(-1)^n}{(-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{(1)^{n+1}} + (-1)^{n+1}\right] - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{-n}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 1 + (-1)^{n+1}\right] - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^{-n} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{-1 + (-1)^n}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{6}\left((-1)^{n+1} + (-1)^{-n} \right) \quad ; n \geq 0$$

بالعودة إلى c_{-n} وجدنا أنه:

$$c_{-n} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(-1)^n \quad ; n \geq 1$$

فنلاحظ أنه عندما يكون n زوجياً فإن $c_{-n} = 0$ أما عندما يكون n فردياً فإن:

$$c_{-n} = \frac{-1}{3}$$

أما بالنسبة لـ c_n وجدنا أنه:

$$c_n = \frac{1}{6}\left(\frac{-1 + (-1)^n}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{6}\left((-1)^{n+1} + (-1)^{-n} \right) \quad ; n \geq 0$$

فعندما يكون n زوجياً فإن $c_n = 0$ أما عندما يكون n فرديا فإن:

$$c_n = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

وتكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 2$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-1}{3}}{z^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot z^{2n+1}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{-1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot z^{2n+1}\right)$$

وهي متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في المنطقة $1 < |z| < 2$ وهو المطلوب.

١ . ١٩. تصنيف النقاط الشاذة لدالة مفروضة $f(z)$ وذلك بحسب مفهوم لوران:

١ . إذا كان $c_{-n} = 0 \quad ; n \geq 1$

أي إن القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران يكون معدوماً فإن النقطة الشاذة $z = a$ للتابع $f(z)$ التي ننشر حولها هذا التابع تكون نقطة شاذة قابلة للإزالة(الحذف) والعكس صحيح أيضاً فعلى سبيل المثال: لتكن الدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

فبحسب مفهوم لوران بين نوع النقطة الشاذة $z = 0$ للدالة السابقة.

الحل:

إن متسلسلة لوران لهذا التابع في المنطقة $0 < |z| < \infty$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n . z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots;$$

إذاً بحسب مفهوم لوران وكون القسم الرئيسي معدوم نجد أن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ المعطى بالفرض و نوعها نقطة شاذة قابلة للإزالة (الحذف).

٢ . إذا كان القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران يتألف من عدد منتهٍ من الحدود وليكن عدد الحدود n فرضاً أي من الشكل:

$$\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

وبحيث إن $c_{-n} \neq 0$ ومن ثمّ فإن النقطة الشاذة $z = a$ هي قطب من المرتبة n للتابع $f(z)$ الممثل بمتسلسلة لوران السابقة وفي الحالة الخاصة عندما $n = 1$ أي إن عدد الحدود مساوٍ للواحد الموجودة في القسم الرئيسي فعندئذٍ النقطة الشاذة $z = a$ هي عبارة عن قطب بسيط أي إن:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad ; \quad c_{-1} \neq 0$$

٣ . إذا كان القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران يتكون من عدد غير منتهٍ من الحدود فإن النقطة $z = a$ الشاذة هي عبارة عن نقطة شاذة أساسية (أي إن القسم الرئيسي لمنشور لوران لهذا التابع حول تلك النقطة هو متسلسلة لانهائية).

٤ . إذا كانت a نقطة شاذة للتابع $f(z)$ فإن الثابت c_{-1} أي أمثال $\frac{1}{z-a}$ من سلسلة لوران السابقة يدعى براسب التابع $f(z)$ في النقطة الشاذة $z = a$.

١ . ٢٠ . تمارين محلولة:

التمرين الأول:

بفرض أن: $f(z) = \dfrac{3z}{(z-1)(z-2)}$.

هل الدالة السابقة ميرومورفية؟

الحل:

إن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ السابقة هي حلول المعادلة:

$$(z-1)(z-2) = 0 \Rightarrow z = 1 \; z = 2$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة بالنسبة للتابع وهي عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ الدالة $f(z)$ هي دالة ميرومورفية.

التمرين الثاني:

بين باستخدام مفهوم لوران نوع النقطة الشاذة $z = -2$ بالنسبة للدالة:

$$f(z) = (z-3).\sin\frac{1}{z+2}$$

الحل:

نفرض أن $z + 2 = t \Rightarrow z = t - 2$ ومن ثمَّ نحصل على :

$$(z-3).\sin\frac{1}{z+2}=(t-5).\sin\frac{1}{t}$$

وبالاستفادة من نشر الـ sin نجد أن:

$$(t-5).\sin\frac{1}{t}=(t-5).\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3!\,.\,t^3}+\frac{1}{5!\,.\,t^5}-\frac{1}{7!\,.\,t^7}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{3!\,.\,t^2}+\frac{1}{5!\,.\,t^4}-\frac{1}{7!\,.\,t^6}+\cdots\right)-\left(\frac{5}{t}-\frac{5}{3!\,.\,t^3}+\frac{5}{5!\,.\,t^5}-\frac{5}{7!\,.\,t^7}+\cdots\right)$$

$$=1-\frac{5}{t}-\frac{1}{3!\,.\,t^2}+\frac{5}{3!\,.\,t^3}+\frac{1}{5!\,.\,t^4}-\frac{5}{5!\,.\,t^5}-\frac{1}{7!\,.\,t^6}+\cdots$$

بالعودة وتعويض كل $t=z+2$ نجد أن:

$$f(z)=1-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{3!\,.\,(z+2)^2}+\frac{5}{3!\,.\,(z+2)^3}+\frac{1}{5!\,.\,(z+2)^4}-\frac{5}{5!\,.\,(z+2)^5}-\frac{1}{7!\,.\,(z+2)^6}+\cdots$$

ومن ثمَّ فإن النقطة $z=-2$ هي نقطة شاذة معزولة وأساسية للتابع المفروض وذلك حسب مفهوم لوران، وذلك لأن القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران يتكون من عدد غير منتهٍ من الحدود.

التمرين الثالث:

لتكن لدينا الدالة: $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$

أوجد متسلسلة لوران في الحلقة $0<|z|<\infty$ ثم بين طبيعة النقطة $z=0$

الحل:

لنوجد متسلسلة لوران للتابع $f(z)$

$$f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{\sin z}{z^3}$$

بالاستفادة من نشر الـ $\sin z$ نجد أن:

$$\frac{1}{z^2}-\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots$$

وبحسب مفهوم لوران نجد أن النقطة الشاذة المعزولة $z=0$ بالنسبة للتابع $f(z)$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة بسبب إنعدام الجزء الرئيسي من متسلسلة لوران.

التمرين الرابع:

أوجد نشر لوران للتابع:

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\quad ;\quad |z-1|>0$$

ثم بين طبيعة النقطة $z=1$ استناداً إلى مفهوم لوان.

الحل:

نلاحظ أن البسط e^{2z} هو دالة تحليلية في جميع نقاط المستوي وبالتالي لإيجاد نشر لوران نفرض أن:

$$z-1=t\Rightarrow z=t+1$$

$$F(t)=f(t+1)=\frac{e^{2(t+1)}}{t^3}=\frac{e^2.e^{2t}}{t^3}$$
$$=\frac{e^2}{t^3}\left(1+2t+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{e^2}{t^3}+2\frac{e^2}{t^2}+\frac{2e^2}{t}+e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{(n+3)!}.t^n$$

وبالعودة وتعويض كل $t=z-1$ نجد ان:

$$f(z)=\frac{e^2}{(z-1)^3}+2\frac{e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{(n+3)!}.(z-1)^n$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي يتكون من ثلاثة حدود فقط ومن ثمَّ حسب مفهوم لوران فإن النقطة $z = 1$ هي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة.

التمرين الخامس:

بين نوع النقطة $z = 0$ بالنسبة للدالة $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ بالإعتماد على مفهوم لوران وذلك في المنطقة:

$$0 < |z| < \infty$$

الحل:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,.\,z^2} + \frac{1}{3!\ z^3} + \cdots$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران هي عبارة عن متسلسلة غير منتهية ومن ثمَّ بحسب مفهوم لوران تكون النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة أساسية بالنسبة للدالة $f(z)$.

التمرين السادس:

بالاعتماد على نشر لوران بين طبيعة النقطة $z = 0$ للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z^5}.\,e^{z^3}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^5}\left(1 + z^3 + \frac{z^6}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{12}}{4!} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^2} + \frac{z}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

وبحسب مفهوم لوران تكون النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ وهي عبارة عن قطب مرتبة خامسة.

التمرين السابع:

بالاعتماد على نشر لوران بين نوع النقطة $z = 0$ للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z} \quad ; |z| > 0$$

الحل:

$$f(z) = \frac{1}{z}.\left(1 - \frac{1}{2!\,.z^2} + \frac{1}{4!\,.z^4} - \frac{1}{6!\,.z^6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2!\,.z^3} + \frac{1}{4!\,.z^5} - \frac{1}{6!\,.z^7} + \cdots$$

وحسب مفهوم لوران تكون النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة أساسية، وذلك لأن متسلسلة الجزء الرئيسي لمتسلسلة لوران هي متسلسلة لانهائية.

التمرين الثامن:

بالاعتماد على مفهوم لوران بين نوع النقطة $z = a$ للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}$$

الحل:

إن $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z+a)}$$

بفرض أن $z - a = t \quad \Rightarrow z = a + t$ ومن ثمَّ يكون:

$$F(t) = f(a+t) = \frac{1}{t.(2a+t)} = \frac{1}{t}.\frac{1}{2a\left(1+\frac{t}{2a}\right)} = \frac{1}{2at}.\frac{1}{\left(1+\frac{t}{2a}\right)}$$

$$= \frac{1}{2at}\left(1 - \frac{t}{2a} + \left(\frac{t}{2a}\right)^2 - \left(\frac{t}{2a}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2at} - \frac{1}{(2a)^2} + \frac{t}{(2a)^3} - \frac{t^2}{(2a)^4} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{2a(z-a)} - \frac{1}{(2a)^2} + \frac{z-a}{(2a)^3} - \frac{(z-a)^2}{(2a)^4} + \cdots$$

ومن ثمَّ بحسب مفهوم لوران نجد أن النقطة $z = a$ هي عبارة عن قطب بسيط. وذلك لأن عدد الحدود الواقعة في القسم الرئيسي هو واحد فقط.

١ . ٢١ . منشور سلسلة لوران حول اللانهاية

لتكن $z = \infty$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ في المستوي العقدي الممدد $\overline{C}$ وهذا يعني أن هناك دائرة C مركزها المبدأ ونصف قطرها r بحيث يكون التابع تحليلياً في كل نقطة z خارج الدائرة $|z| > r$ باستثناء النقطة $z = \infty$ وجميع النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ في المستوي العقدي تقع داخل الدائرة C.

- يوجد للتابع $f(z)$ متسلسلة لوران حول نقطة اللانهاية بقوى $\frac{1}{z}$ في المنطقة $r < |z| < \infty$ من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \quad ; r < |z| < \infty$$

وبعبارة أخرى:

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

ونعلم أن المتسلسلة السابقة متقاربة إذا كانت كلتا المتسلسلتين السابقتين متقاربتين.

ولنصنف الحالات التالية:

١ . إذا كانت $c_n = 0$ وبحيث أن $c_0 \neq 0$ و $n \geq 1$، فعندئذٍ النقطة $z = \infty$ هي شاذة قابلة للحذف للتابع $f(z)$ وعندئذٍ يكون:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots;$$

وسوف يكون عند ذلك:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = c_0$$

٢ . إذا كانت $c_n \neq 0$ و $c_k = 0$ من أجل $k > n$ فعندئذٍ $z = \infty$ هي عبارة عن قطب من المرتبة n للتابع $f(z)$ وعندئذٍ يكون شكل التابع $f(z)$ هو:

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots c_n z^n$$

٣ . إذا كان القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران يحتوي على عدد غير منتهٍ من الحدود التي أمثالها غير معدومة فعندئذٍ تكون النقطة $z = \infty$ هي نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$.

١ . ٢٢ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

بين نوع النقطة الشاذة $z = \infty$ بالنسبة للدالة:

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

وذلك من أجل $|z| > 1$

الحل: لدينا

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1} = \frac{z^2}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{1-\frac{1}{z}} = z.\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

$$= z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

فنلاحظ أن $c_n = 0 \quad ; n \geq 2$ ولدينا أيضاً $c_1 = 1$ ومن ثمَّ نستنتج أن النقطة $z = \infty$ هي نقطة شاذة معزولة وهي عبارة عن قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$.

مثال (٢):

بين نوع النقطة الشاذة $z = \infty$ بالنسبة للدالة:

$$f(z) = \frac{z^4}{z-1}$$

وبحيث إن $1 < |z|$.

الحل:

$$f(z) = \frac{z^4}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^3}{1-\frac{1}{z}} = z^3.\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}\dots\right)$$

$$= z^3 + z^2 + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

ومن ثمَّ $z = \infty$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثالثة للتابع $f(z)$.

مثال (٣):

بين نوع النقطة الشاذة $z = \infty$ بالنسبة للدالة

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \quad ; \quad |z| > 1$$

الحل:

$$f(z) = \frac{z}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^7} + \cdots$$

نلاحظ أن $c_n = 0$ ومن ثمَّ النقطة $z = \infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح (الإزالة) أو (الحذف).

مثال (٤):

انشر التابع $f(z)=\dfrac{1}{z^3+8}$ في متسلسلة لوران في جوار اللانهاية ثم حدد القسم الرئيسي من خلال نشر التابع السابق.

الحل:

إن سلسلة لوران حول اللانهاية هي نفسها سلسلة لوران حول الصفر، وذلك إذا اعتبرنا z كبيرة ومن ثم فإن:

$$f(z)=\frac{1}{z^3\left(1+\frac{8}{z^3}\right)}=\frac{1}{z^3\left(1-\left(-\frac{8}{z^3}\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{z^3}.\left(1+\left(-\frac{8}{z^3}\right)+\left(-\frac{8}{z^3}\right)^2+\left(-\frac{8}{z^3}\right)^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}.\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{8}{z^3}\right)^n \qquad ; \left|\frac{8}{z^3}\right|<1 \Rightarrow |z|>2$$

ومن ثمّ نجد أن:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(8)^n.\frac{1}{z^{3n+3}}$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي غير موجود لأن عدد الحدود ذات الأسس الموجبة معدوماً.

مثال (٥):

أوجد متسلسلة لوران حول النقطة $z=0$ للدالة:

$$f(z)=z^2.e^{\frac{1}{z}}$$

الحل:

$$f(z) = z^2.\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\ z^2} + \frac{1}{3!\ z^3} + \frac{1}{4!\ z^4} + \cdots\right)$$
$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\ z} + \frac{1}{4!\ z^2} + \cdots$$

وهي متسلسلة لوران حول $z = 0$ ويكون عندها:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

- نلاحظ أن $z = \infty$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية أي قطب مضاعف للدالة f والسلسلة الناتجة السابقة متقاربة في الجوار الموخوذ لهذه النقطة فهي ذاتها متسلسلة لوران حول $z = 0$ للدالة f عندئذٍ يكون القسم الرئيسي هو:

$$f_1(z) = z^2 + z$$

أما بقية الحدود فتمثل القسم التحليلي.

واضح أن $z = 0$ هي عبارة عن نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$ وذلك بحسب مفهوم لوران.

مثال (٦):

حدد النقاط الشاذة في $\overline{C}$ ثم عين نوع كل نقطة من خلال النشر في متسلسلة لوران وذلك لكل من التوابع التالية:

1) $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^5}$

2) $f(z) = z(1 - e^{\frac{1}{z}})$

الحل:

١) إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن $z = 0\,, z = \infty$ وذلك في المستوي الموسع وهما نقطتان شاذتان معزولتان والتابع المفروض غير معرف عند هاتين النقطتين.

وبالنشر نجد أن:

$$f(z)=\frac{1}{z^5}.\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{z}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^9}{7!}+\cdots$$

ومن النشر نستنتج أن $z=0$ هي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة (في جوار $z=0$) لأننا نرى أن المتسلسلة السابقة في جوار $z=0$ تحتوي على ثلاثة حدود ذات اسس سالبة اثنان من هذه الحدود تكون معدومة وهي أمثال z^{-1},z^{-2} وأعلى الأسس السالبة في القسم الرئيسي يساوي إلى 3.

أما في جوار اللانهاية وبما أن المتسلسلة تحتوي على عدد لانهائي من الأسس الموجبة اي أسس z الموجبة فالنقطة $z=\infty$ هي عبارة عن نقطة شاذة أساسية.

٢) إن النقاط الشاذة للتابع المعطى هي:

$$z=0\,,z=\infty$$

بالنشر نجد أن:

$$f(z)=z.\left(1-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\ z^2}+\frac{1}{3!\ z^3}+\cdots\right)\right)$$

$$=z.\left(-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!\ z^2}-\frac{1}{3!\ z^3}-\cdots\right)=-1-\frac{1}{2!\ z}-\frac{1}{3!\ z^2}-\cdots$$

ومن النشر نلاحظ أن:

$z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$

$z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للحذف (قابلة للإصلاح أو الإزالة).

مثال (٧):

حدد نوع اللانهاية لكل من الدوال الآتية:

1) $f(z)=\sin z$ 2) $f(z)=\frac{iz+1}{z-1}$ 3) $f(z)=z^2+z+3$

4) $f(z)=\operatorname{ch}z$ 5) $f(z)=e^z$ 6) $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$

$$7)\ f(z)=\frac{z^3+i}{z} \qquad 8)\ f(z)=e^{tg\frac{1}{z}}$$

الحل:

١) إن منشور التابع $\sin z$ بجوار اللانهاية هو نفس منشور التابع $\sin z$ بجوار الصفر وإن هذا المنشور يحوي على متسلسلة لانهائية للقوة الموجبة لـ z أي إن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة أساسية.

٢) لمعرفة نوع نقطة اللانهاية للتابع $f(z)$ المعطى يكفي معرفة نوع نقطة الصفر للتابع $F(t)$ وبحيث إن:

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{i\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}-1}=\frac{i+t}{1-t}$$

ونلاحظ أن النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للتابع $F(t)$ ومن ثمَّ النقطة $z=\infty$ هي نقطة عادية للتابع $f(z)$ المعطى.

٣) واضح أن القسم الرئيسي يحوي على اثنين من الحدود وتكون النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع المعطى وهي عبارة عن قطب مرتبة ثانية.

٤) نعلم أن:

$$chz=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

ونلاحظ أن القسم الرئيسي يحوي على عدد غير منتهٍ من الحدود، ومن ثمَّ نجد أن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة معزولة وهي عبارة عن نقطة شاذة أساسية.

٥) نعلم أن:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

ونلاحظ أن القسم الرئيسي يحوي على عدد غير منتهٍ من الحدود، ومن ثمَّ نجد أن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة معزولة وهي عبارة عن نقطة شاذة أساسية.

٦) لمعرفة نوع نقطة اللانهاية للتابع $f(z)$ يكفي معرفة نوع نقطة الصفر للتابع $F(t)$ وبحيث إن:

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1}=\frac{1-t}{1+t}$$

ونلاحظ أن النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للتابع $F(t)$ ومن ثمَّ النقطة $z=\infty$ هي نقطة عادية للتابع $f(z)$ المعطى.

٧) $$f(z)=\frac{z^3+i}{z}=z^2+\frac{i}{z}$$

ومن الأخيرة نلاحظ ووضوحاً أن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة وهي عبارة عن قطب مرتبة ثانية (قطب مضاعف).

٨) $$f(z)=e^{tg\frac{1}{z}}$$

لمعرفة نوع نقطة اللانهاية للتابع $f(z)$ يكفي معرفة نوع نقطة الصفر للتابع $F(t)$ وبحيث إن:

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=e^{tgt}$$

ونلاحظ أن النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للتابع $F(t)$ ومن ثمَّ النقطة $z=\infty$ هي نقطة عادية للتابع $f(z)$ المعطى.

١ . ٢٣ . طبيعة التوابع التحليلية في جوار اللانهاية:

إن سلوك أو تصرف التابع $f(z)$ في اللانهاية هو نفس سلوك التابع $f(z)$ في جوار الصفر المعرف في المنطقة $|z_1|<\frac{1}{R}$ وهو تحليلي هناك باستثناء النقطة z_1 على

الأكثر، ولإيجاد الحل في جوار اللانهاية نجري الدراسة في جوار الصفر وذلك بإجراء التحويل $z = \frac{1}{t}$.

- يكون التابع $f(z)$ تحليلياً في جوار اللانهاية إذا لم تحوِ المتسلسلة:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n z^n$$

حدوداً ذات قوى موجبة ويعتبر c_0 الحد الحر في هذه الحالة هو قيمة التابع في اللانهاية أي بعبارة أخرى:

$$f(\infty) = c_0$$

١ . ٢٣ . ١ . ملاحظات ونتائج هامة:

١ . إن كل تابع كسري درجة مقامه k لا تقل عن درجة بسطه m يكون تحليلياً في جوار اللانهاية، ويكون عندئذٍ $f(\infty)$ معدوماً أو مختلفاً عن الصفر، وذلك حسب ما يكون $k = m$ أو $k > m$.

٢ . إن لكل تابع كسري درجة مقامه k أصغر من درجة بسطه m قطباً من المرتبة $(m - k)$ في نقطة اللانهاية، وعلى هذا فإن للحدودية من الدرجة m قطباً من المرتبة m في جوار اللانهاية.

٣ . إن للدالة الأسية والدوال المتسامية الآتية:

$$\cos z , \sin z , \operatorname{ch} z , \operatorname{sh} z, e^z$$

نقاطاً شاذة أساسية في اللانهاية.

٤ . التابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ تحليلي في اللانهاية لأن:

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

٥ . إذا كان للتابع $f(z)$ قطباً في اللانهاية، وإذا كان $c > 0$ عدداً كيفياً فعندئذ يمكننا أن نجد عدداً R على شكل يكون فيه $|f(z)| > C$ من أجل $|z| > R$.

٦ . إذا كان للتابع $f(z)$ في اللانهاية نقطة شاذة أساسية، وإذا كان C عدداً عقدياً كيفياً وبفرض أن ε, R عددين موجبين فعندئذ توجد دوماً نقطة z تحقق المتراجحتين:

$$|f(z) - c| < \varepsilon \;\; ; \;\; |z| > R$$

٧ . إذا كانت z_0 قطباً من الدرجة m للدالة $f(z)$ فعندئذ يكون:

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

١ . ٢٤ . أصفار التابع النظامي:

سندرس في هذه الفقرة أهم النقط العادية غير الشاذة لتابع وحيد القيمة $f(z)$ والمتمثلة بالأصفار، وذلك لارتباطها الوثيق مع أقطاب الدالة $f(z)$.

١ . ٢٤ . ١ . تعريف (١):

يقال إن النقطة $z = a$ وحيث $(a = \infty)$ هي صفر للتابع $f(z)$ إذا كان نظامياً في a وكان $f(a) = 0$.

١ . ٢٤ . ٢ . تعريف (٢):

إن مرتبة أو درجة الصفر $z = a$ للدالة f هي مرتبة أول مشتق غير معدوم للدالة f في a، وبعبارة أخرى يكون الصفر $z = a$ للتابع f من المرتبة m إذا كان:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad (1)$$

وكان:

$$f^{(m)}(a) \neq 0$$

وفي الحالة الخاصة $m = 1$ يكون:

$f'(a) \neq 0$ ونسمي الصفر في هذه الحالة صفراً بسيطاً.

مثال:

أوجد أصفار التابع $f(z) = z^3$ وما درجة كل من تلك الأصفار؟.

الحل:

إن أصفار التابع $f(z)$ تتعين بجذور المعادلة:

$$f(z) = 0 \Rightarrow z^3 = 0 \Rightarrow z = 0$$

والأكثر من ذلك:

$$f(0) = f'(0) = f''(z) = 0$$

ولكن: $$f^{(3)}(0) = 6 \neq 0$$

ومن ثمَّ تكون $z = 0$ هي صفر من المرتبة الثالثة.

١ . ٢٤ . ٣ . مبرهنات أساسية:

المبرهنة الأولى: تكون النقطة $z = a$ وبحيث $a \neq \infty$ صفراً من المرتبة m للدالة $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت الدالة $f(z)$ تكتب بجوار a بالشكل الآتي:

$$f(z) = (z - a)^m . h(z) \qquad (2)$$

وحيث إن $h(z)$ هو تابع نظامي لاينعدم عند $z = a$ أي:

$$h(a) \neq 0$$

المبرهنة الثانية: تكون النقطة $z = \infty$ صفراً من المرتبة m للدالة $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت الدالة $f(z)$ تكتب بجوار اللانهاية بالشكل التالي:

$$f(z) = (z)^{-m} . \psi(z) \qquad (3)$$

وحيث إن $\psi(z)$ هو تابع نظامي لاينعدم عند $z = \infty$ أي:

$$h(\infty) \neq 0$$

المبرهنة الثالثة: إذا كانت النقطة a صفراً للدالة $f(z)$ من المرتبة m فإنها تكون عندئذٍ صفراً من المرتبة $m.p$ للدالة $g(z) = [f(z)]^p$ وحيث $p \geq 1$ عدد صحيح.

المبرهنة الرابعة: تكون النقطة $z = a$ وبحيث $a \neq \infty$ صفراً من المرتبة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا تحققت بجوار النقطة a الصيغة التقريبية التالية:

$$f(z) \cong_{z\to a} (z-a)^m.B \qquad ; B \neq 0 \qquad (4)$$

المبرهنة الخامسة: تكون النقطة $z = \infty$ صفراً من المرتبة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا تحققت بقرب اللانهاية الصيغة التقريبية التالية:

$$f(z) \cong_{z\to a} z^{-m}.A \qquad ; A \neq 0 \qquad (5)$$

١ . ٢٤ . ٤ . ملاحظات ونتائج:

١ . إن أصفار الدالة غير الثابتة هي عبارة عن نقاط معزولة.

٢ . إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في جوار النقطة $z = a$ وفقاً لمنشور تايلور لهذه الدالة حول تلك النقطة بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad ; c_k \neq 0 \quad , c_n = 0 \quad ; \ n > k$$

عندئذ تكون النقطة $z = a$ تمثل صفراً للدالة $f(z)$ من المرتبة k.

٣ . إذا كانت النقطة $z = a$ صفراً للدالة $f(z)$ من المرتبة k فإن $z = a$ تمثل قطباً للدالة $\frac{1}{f(z)}$ من المرتبة k.

٤ . إذا كانت $z = a$ قطباً للدالة $f(z)$ من المرتبة k فإن $z = a$ هي صفر للدالة $\frac{1}{f(z)}$ من المرتبة k وذلك بفرض أن $\frac{1}{f(z)}$ دالة معرفة عند a.

٥ . إذا كانت $f(z)$ تحليلية ولها قطب في اللانهاية نقول إنها دالة ميرومورفية في امتداد المستوي العقدي أي في $\overline{C}$.

٦ . للدالة الميرومورفية عدد منتهٍ من الأقطاب في أي منطقة محدودة D من المستوي العقدي.

١ . ٢٤ . ٥ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

أوجد أصفار التابع $f(z) = z^4$ وبين نوعها ثم استفد من ذلك في تعيين نوع النقاط الشاذة للتابع $g(z) = \frac{1}{z^4}$.

الحل:

إن أصفار التابع $f(z)$ تتعين بجذور المعادلة:

$$f(z) = 0 \Rightarrow z^4 = 0 \Rightarrow z = 0$$

والأكثر من ذلك:

$$f(0) = f'(0) = f''(z) = f^{(3)}(0) = 0$$

ولكن $$f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$$

ومن ثمَّ تكون $z = 0$ هي صفراً من المرتبة الرابعة.

وحسب ما ورد أعلاه تكون $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $g(z)$ وهي قطب مرتبة رابعة للتابع $g(z)$.

مثال (٢):

لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

إن هذه الدالة هي دالة ميرومورفية في المستوي العقدي(يمكننا التحقق من ذلك).

ولكن إذا أخذنا الدالة:

$$f(z) = z^2 + 2z$$

نلاحظ أنَّ لدينا قطباً في اللانهاية من المرتبة الثانية، وتسمى الدالة في هذه الحالة بالدالة الميرومورفية لامتداد المستوي العقدي C أي $\overline{C}$.

مثال (٣):

أوجد الأصفار والنقاط الشاذة وذلك للتابع التالي:

$$f(z) = \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

الحل:

تتعين أصفار التابع وذلك بحل المعادلة التالية وإيجاد جذورها:

$$f(z) = 0 \Rightarrow \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \pi k \quad ; k \in Z$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$z_k = \frac{1}{1-\pi k} \quad ; \quad k \in Z$$

والجذور السابقة هي عبارة عن أصفار التابع المعطى، أما مرتبة هذه الأصفار فهي من مرتبة أول مشتق للتابع المعطى غير معدوم في تلك الجذور ومن ثمَّ لا بد من حساب المشتقات:

$$f'(z) = \frac{1}{z^2}\cos\left(1 - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow f'(z_k) = f'\left(\frac{1}{1 - \pi k}\right) = (1 - \pi k)^2 . \cos\pi k$$

ونلاحظ أن

$$f'(z_k) \neq 0 \quad k \in Z$$

ومن ثمَّ الأصفار z_k للتابع $f(z)$ المعطى هي عبارة عن أصفار بسيطة.

إن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ ونلاحظ أن :

$$\lim_{z \to 0} \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \text{غير موجودة}$$

ومن ثمَّ $z = 0$ هي نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$ المعطى ونقول في هذه الحالة إن التابع $f(z)$ يتذبذب مابين $+1$ و -1.

مثال (٤):

أوجد الأصفار والنقاط الشاذة للدالة:

$$f(z) = \frac{tgz}{z}$$

الحل:

إن التابع $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$\frac{tgz}{z} = \frac{sinz}{z.cosz}$$

وأصفار الدالة تتعين بجذور المعادلة:

$$\frac{sinz}{z.cosz} = 0 \Rightarrow sinz = 0 \Rightarrow z_k = \pi k \quad ; k \in Z^*$$

أما بالنسبة لمرتبة هذه الأصفار فهي عبارة عن أصفار بسيطة.

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي جذور المعادلة:

$$z.cosz = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$z_k = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right) \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

إن النقطة $z = 0$ تمثل نقطة شاذة معزولة قابلة للإزالة بالنسبة للتابع $f(z)$ المعطى.

أما النقاط $z_k = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ وبحيث $k \in Z$ هي نقاط شاذة معزولة بالنسبة للتابع وتمثل أقطاباً بسيطة للتابع $f(z)$ ويمكن التحقق من ذلك بسهولة.

مثال (٥):

أوجد الأصفار والنقاط الشاذة للدالة:

$$f(z) = sh\frac{1}{z}$$

الحل:

أصفار الدالة تتعين بجذور المعادلة:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow z_k = \frac{i}{\pi k} \quad ; k \in Z^*$$

أما بالنسبة لمرتبة هذه الأصفار فهي عبارة عن أصفار بسيطة لأن:

$$\left[\left(\operatorname{sh}\frac{1}{z}\right)'\right]_{z_k} \neq 0$$

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ فنلاحظ أن $z = 0$ هي نقطة شاذة للدالة $f(z)$ المعطاة ونعلم أن:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\ z^3} + \frac{1}{3!\ z^5} + \cdots$$

إن النقطة الشاذة $z = 0$ بحسب مفهوم لوران هي عبارة عن نقطة شاذة أساسية و $z = \infty$ صفر بسيط.

مثال (٦):

أوجد الأصفار والنقاط الشاذة للدالة التالية:

$$f(z) = (e^z + 1)^3$$

إن أصفار الدالة هي جذور المعادلة التالية:

$$f(z) = 0 \Rightarrow (e^z + 1)^3 = 0 \Rightarrow e^z + 1 = 0 \Rightarrow e^z = -1 \Rightarrow z = \ln(-1)$$

ومن ثمَّ نجد أن أصفار الدالة المعطاة هي:

$$z_k = i\pi(1 + 2k) \quad ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

أما مرتبة هذه الأصفار فهي من مرتبة أول مشتق غير معدوم عند هذه النقاط.

$$f(z_k) = f'(z_k) = f''(z_k) = 0$$

أما $\quad f^{(3)}(z_k) \neq 0$

ومن ثمَّ الأصفار z_k للتابع $f(z)$ هي عبارة عن أصفار من المرتبة الثالثة.

بطريقة أخرى إن z_k هي أصفار للتابع $g(z)$ بحيث إن قاعدة ربط $g(z)$ هي:

$$g(z) = e^z + 1$$

أما بالنسبة لهذه الأصفار فهي عبارة عن أصفار بسيطة للتابع $g(z)$ وذلك لأن:

$$g'(z_k) \neq 0$$

وباستخدام المبرهنة (3) نجد أن الأصفار z_k هي عبارة عن أصفار من المرتبة الثالثة للتابع $f(z)$ وذلك لأن:

$$f(z) = [g(z)]^3$$

بالنسبة للنقاط الشاذة فنلاحظ أن النقطة $z = \infty$ هي نقطة ليست عادية بل نقطة شاذة أساسية.

مثال (٧):

أوجد الأصفار والنقاط الشاذة للدالة التالية:

$$f(z) = \frac{(z^3+1)^6}{(z^2+4)}.e^{\frac{1}{z}}$$

إن أصفار الدالة هي جذور المعادلة الآتية:

$$f(z) = 0 \Rightarrow \frac{(z^3+1)^6}{(z^2+4)}.e^{\frac{1}{z}} = 0 \Rightarrow (z^3+1)^6.e^{\frac{1}{z}} = 0$$
$$\Rightarrow (z^3+1)^6 = 0 \Rightarrow z^3+1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1$$

ومن ثمَّ نجد أن أصفار الدالة المعطاة هي الجذور التكعيبية للعدد -1 أي إن:

$$z_k = \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i.\sin\frac{\pi+2\pi k}{3} \quad ; k = 0,1,2$$

أما مرتبة هذه الأصفار فهي أصفار من المرتبة السادسة للتابع f المعطى.

مثال (٨):

حدد نوع النقطة $z = 1$ بالنسبة للتابع $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2-1)^2}$.

الحل:

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-1)^2 = \lim_{z\to 1}\frac{\sin z}{(z^2-1)^2}(z-1)^2$$
$$= \frac{\sin 1}{4} \neq 0$$

ومن ثمّ فإن $z = 1$ قطب مرتبة ثانية.

١ . ٢٤ . ٦ . القطب:

لتكن $z = a$ نقطة شاذة معزولة للتابع f، عندئذ نطرح المبرهنات الآتية:

١ . ٢٤ . ٧ . مبرهنة (١):

١ . تكون النقطة a ($a \neq \infty$) قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z) = (z-a)^{-m} \,.\, \psi(z) \qquad (1)$$

حيث $\psi(z)$ تابع نظامي لا ينعدم في النقطة a و $m \geq 1$ عدد صحيح.

٢ . تكون النقطة $z = \infty$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z) = z^m \,.\, h(z) \qquad (2)$$

حيث $h(z)$ تابع نظامي لا ينعدم في النقطة a و $m \geq 1$ عدد صحيح.

(يترك البرهان للقارئ).

١ . ٢٤ . ٨ . مبرهنة (٢):

١ . تكون النقطة الشاذة المعزولة a ($a \neq \infty$) قطباً للتابع f وفقط إذا تحققت الصيغة التقريبية التالية قرب a.

$$f(z) \underset{z\to a}{\approx} A(z-a)^{-m} \quad ; \quad A \neq 0 \qquad (3)$$

٢ . تكون النقطة الشاذة المعزولة $z = \infty$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z) \underset{z\to a}{\approx} Bz^{m} \quad ; \quad B \neq 0 \qquad (4)$$

(يترك البرهان للقارئ).

ملاحظة: يمكن اعتماد الصيغة (3) كتعريف لمرتبة القطب a وحيث $(a \neq \infty)$ والصيغة (4) كتعريف لمرتبة القطب $z = \infty$.

١ . ٢٤ . ٩ . مبرهنة (٣):

تكون النقطة a قطباً من المرتبة m للتابع f(z) إذا وفقط إذا كانت صفراً من المرتبة m للتابع $\frac{1}{f(z)}$.

١ . ٢٤ . ١٠ . مبرهنة (٤):

لتكن a $(a \neq \infty)$ نقطة شاذة معزولة للتابع f. تكون a قطباً من المرتبة $1 \leq m$ للتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيس من سلسلة لوران للتابع f حول a منته وأكبر أسسه السالبة هو $-m$ (أعلى أس في المقام يساوي m).

الإثبات:

لزوم الشرط: لنفرض أن a $(a \neq \infty)$ قطب من المرتبة m لـ f. عندها يكون:

$$f(z) = (z-a)^{-m} \cdot \psi(z)$$

حيث $\psi(z)$ تابع نظامي غير معدوم في a.

لكن حول a لدينا:

$$f(z) = (z-a)^{-m}\left[c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots\right]$$

$$= \frac{c_{-m}}{(z-a)^{m}} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m+1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

القسم الرئيس من سلسلة لوران السابقة هو $c_{-m} \neq 0$; $f_1 = \sum_{1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$

وعدد حدوده منته وأكبر أسسه السالبة هو $-m$.

كفاية الشرط: من سلسلة لوران للتابع f حول a السابقة نجد أن الصيغة (3) محققة وبالتالي فإن a قطب من المرتبة m للتابع f.

١ . ٢٤ . ١١ . مبرهنة (٥):

لتكن $z = \infty$ نقطة شاذة معزولة لـ f. تكون $z = \infty$ قطباً من المرتبة m للتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيس من سلسلة لوران لـ f حول $z = \infty$ (قوى z الموجبة) منتهياً وأكبر أس موجب هو m.

(أترك الإثبات تدريباً للقارئ).

١ . ٢٥ . مفهوم التمديد التحليلي:

نفهم التمديد التحليلي لتابع معرف على مجموعة جزئية $M \subset C$ على أنه تمديد لذلك التابع f إلى تابع معرف وتحليلي على مجموعة ما $D \supset M$ وبحيث إن مقصوره على المجموعة M يتطابق مع f_0 أي إن:

$$f|_M = f_0$$

وكمثال على ذلك:

إن مجموع المتسلسلة $f_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ معرف وتحليلي فقط في الدائرة $|z| < 1$، وذلك لأنه من أجل $|z| \geq 1$ تتباعد تلك المتسلسلة. من ناحية ثانية، إن مجموع المتسلسلة الهندسية تلك في دائرة تقاربها هو $f(z) = \frac{1}{1-z}$ وهذه العلاقة تعطينا تمديداً تحليلياً للتابع $f_0(z)$ على الساحة $C\backslash\{1\}$.

الجدير بالذكر، إن مسألة التمديد التحليلي، بالطبع، ليست مسألة قابلة للحل بشكل دائم، فعلى سبيل المثال، لنأخذ التابع:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

كما وجدنا أن هذا التابع تحليلي في دائرة الوحدة $u: \{|z| < 1\}$، إلا أن نقاط المحيط $\{|z| = 1\}$ هي نقاط شاذة (خط شاذ)، ومن ثمَّ فإنه لا يمكن بأي شكل تمديد التابع $f(z)$ تحليلياً على ساحة تحتوي تماماً الساحة u.

١ . ٢٥ . ١ . تعريف (١):

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في ساحة ما D، ولا يمكن تمديده تحليلياً على ساحة تحتوي تماماً الساحة D، فإن الساحة D تسمى ساحة تحليلية التابع $f(z)$.

١ . ٢٥ . ٢ . تعريف (٢):

نسمي المجموعة المشكلة من الدائرة $u: \{|z - a| < R\}$ والتابع $f(z)$ حيث u هي الدائرة الأعظمية ذات المركز a التي يكون فيها التابع $f(z)$ تحليلياً بعنصر قانوني، أو يكون اختصاراً عنصراً ونرمز له بالرمز $F = (u, f)$، وتسمى النقطة a بمركز العنصر F وتسمى u بدائرة العنصر، وأما قيمة $f(z)$ في نقطة $z \in u$ فتسمى بقيمة العنصر F في النقطة z.

١ . ٢٥ . ٣ . تعريف (٣):

نقول عن عنصرين $F = (u, f)$, $G = (v, g)$ إنهما تمديد تحليلي مباشر واحد للآخر إذا كان تقاطع دائرتيهما u و v غير خالٍ وكذلك $f \equiv g$ في ذلك التقاطع.

١ . ٢٥ . ٤ . تعريف (٤):

نقول عن عنصرين $F = (u, f)$, $G = (v, g)$ إنهما تمديد تحليلي واحد للآخر (بدون كلمة مباشر) إذا وجدت متسلسلة منتهية العدد من العناصر $F_n = (u_n, f_n)$ وحيث $n = 1, 2, 3, \dots, q$، بحيث إن F_1 يكون تمديداً تحليلياً مباشراً لـ F والعنصر

F_q يكون تمديداً تحليلياً مباشراً للعنصر G وبحيث إن كل عنصر F_n تمديد تحليلي مباشر لـ F_{n-1}.

١ . ٢٥ . ٥ . تعريف (٥):

نقول إننا مددنا العنصر القانوني $f_0 = (u_0, f_0)$ على طول الطريق γ وحيث $\gamma: I \to C$ الذي بدايته $a = \gamma(0)$، مركز ذلك العنصر، إذا وجدت مجموعة من العناصر: $F_t = (u_t, f_t) \quad ; \quad t \in I$ مراكزها $a_t = \gamma(t)$ وأنصاف أقطارها ليست معدومة، محققةً للشرط الآتي: إذا كان $u(t_0) \subset I$ جواراً متصلاً للنقطة $t_0 \in I$ وبحيث إن $\gamma(t) \in u(t_0)$ من أجل جميع النقاط $t \in u(t_0)$ (هذا الجوار موجود نتيجة لاستمرارية الطريق)، فإنه من أجل أية قيمة $t \in u(t_0)$ يكون العنصر F_t تمديداً تحليلياً مباشراً لـ F_{t_0}.

١ . ٢٥ . ٦ . مبرهنة (١):

إذا مددنا العنصر القانوني F_0 على طول طريق γ فإننا نحصل بنتيجة تمديده تحليلياً على طول ذلك الطريق على عنصر يتعرف تماماً بغض النظر عن اختيار المجموعة التي بواسطتها تم التمديد.

١ . ٢٥ . ٧ . مبرهنة (٢):

إن $R(t)$ نصف قطر العنصر القانوني F_1 من المجموعة: $F_t = (u_t, f_t); \ t \in I$، المؤدية للتمديد التحليلي على طول الطريق γ، هو تابع مستمر بالنسبة لـ t من المجال المغلق I أو يطابق اللانهاية.

١ . ٢٥ . ٨ . مبرهنة (٣) (مبرهنة الوحدانية في التمديد التحليلي):

إذا كان العنصر F_0 قابلاً للتمديد تحليلياً على طول أي طريق في ساحة وحيدة الاتصال D (بدايته في مركز العنصر F_0) فإن ناتج تمديده على طول جميع الطرق في الساحة D لا يتعلق بالطريق ويتعرف بشكل وحيد بنهايته.

١ . ٢٥ . ٩ . الفروع التحليلية لتابع تحليلي في ساحة وحيدة الاتصال:

إن مبرهنة الوحدانية في التمديد التحليلي تمكننا من بناء خوارزمية مناسبة وبسيطة بواسطتها يمكننا تجزئة التابع التحليلي المتعدد القيم إلى فروع تحليلية، وعلى وجه التحديد: ليكن $F(z)$ تابعاً تحليلياً في الساحة المنتهية الاتصال D، ولننشئ قطوعاً في هذه الساحة بحيث تؤول إلى ساحة وحيدة الاتصال $\overline{D}$ ، ولنثبت عنصراً $f_0(z)$ في النقطة $z_0 \in \overline{D}$ (نقصد بذلك العنصر $(u,\ f_0(z))$، حيث u هي الدائرة الأعظمية التي مركزها z_0 والتي يكون فيها $f_0(Z)$ تحليلياً). إن هذا العنصر، استناداً إلى مبرهنة الوحدانية في التمديد التحليلي يولد في الساحة $\overline{D}$ تابعاً تحليلياً $f_0(z)$ هو فرع تحليلي للتابع $F(z)$، كما أن العناصر المختلفة في النقطة z_0 تولد فروعاً تحليلية مختلفة للتابع، وبهذه الصورة يتجزأ التابع $F(z)$ في الساحة D إلى فروع تحليلية. لنلاحظ بأن القطوع المنشأة في الساحة D التي من أجلها تؤول D إلى ساحة وحيدة الاتصال يمكن تشكيلها بطرق مختلفة، ومن ثمَّ يمكن تجزئة التابع المتعدد القيم بطرق مختلفة.

مثال (١):

لننشئ في المستوي العقدي قطعاً بسيطاً بواسطة طريق γ يصل النقطتين 0 و ∞، فنحصل بذلك على ساحة وحيدة الاتصال D، ولنبين كيف يتجزأ التابع $f(z) = \ln z$ إلى فروع بسيطة. لنثبت نقطة $z_0 \in D$ وعنصر اللوغاريتم $f(z)$ في هذه النقطة. بما أن هذا العنصر قابل للتمديد التحليلي على طول أي طريق غير مار بالنقطتين 0 و ∞ فإننا نحصل، استناداً إلى مبرهنة الوحدانية في التمديد التحليلي، على فرع تحليلي للتابع اللوغاريتمي $\ln z$ في الساحة D، كما أنه يتجزأ إلى عدد لا نهائي من الفروع التحليلية في الساحة، وذلك لأنه إذا كان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ فرعين تحليليين للتابع $\ln z$ فعندئذ يكون:

$$f_1(z) - f_2(z) = 2\pi ki\ ,\ z \in D\ ;\ k \in Z$$

مثال (٢):

إن التابع $f(z) = z^{\alpha}$ يتجزأ في الساحة D إلى فروع تحليلية، فإذا كان α عدداً حقيقياً أصمَّ أو كان $I_m\alpha \neq 0$ فإن عدد الفروع يكون لا نهائياً.

أما إذا كان $\alpha = \dfrac{p}{q}$ حيث p و q عددان صحيحان أوليان فيما بينهما وكان $p \geq q$ فإن $f(z) = z^{\alpha}$ يتجزأ إلى q فرعاً مختلفاً، وذلك لأنه إذا كان $f_1(z),\ f_2(z)$ فرعين تحليليين للتابع $f(z) = z^{\alpha}$ فعندئذ يكون:

$$f_2(z) = e^{2\pi k i \alpha} f_1(z) \ ;\ k \neq 0$$

١ . ٢٦ . تمارين محلولة:

١ . ماهي طبيعة النقطة $z = -1$ بالنسبة للدالة التالية:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$$

الحل:

النقطة $z = -1$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ والأكثر من ذلك:

$$\lim_{z\to -1} (z+1)^3 . \frac{e^z}{(z+1)^3} = \lim_{z\to -1} e^z = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$$

أي إن النقطة $z = -1$ هي نقطة شاذة معزولة ونوعها قطب من الدرجة الثالثة.

٢ . أوجد النقاط الشاذة للدالة وبين نوعها:

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^3 . (z+1) . z}$$

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع السابق هي حلول المعادلة:

$$(z-1)^3 . (z+1) . z = 0 \Rightarrow z_1 = 1\ , z_2 = -1\ , z_3 = 0$$

والنقاط الشاذة السابقة هي نقاط شاذة ومعزولة، والأكثر من ذلك النقطة $z_1 = 1$ هي قطب من الدرجة الثالثة , والنقطتان z_2 , z_3 هي أقطاب بسيطة.

٣ . ليكن التابع:

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{\sin z^2}$$

بين طبيعة النقطة $z = 0$ بالنسبة للتابع $f(z)$.

الحل:

إن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة والأكثر من ذلك فإن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z\cos z^2} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية فنجد:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z\cos z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2\cos z^2 - 4z^2\sin z^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

فالنقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة بالنسبة للتابع $f(z)$ ونوعها قابلة للحذف .

٤ . ناقش ثم صنف أصفار وأقطاب الدالة: $f(z) = \cot z$

الحل:

بما أن:
$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

فإن الدراسة السابقة تبين أن الأقطاب والأصفار محصورة بأصفار البسط والمقام للدالة f وبفرض أن:

$$\cos z = 0$$

فإن:

$$z = (n + \frac{1}{2})\pi \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبما أن: $\sin(n + \frac{1}{2})\pi \neq 0$

فإن: $\cos(n + \frac{1}{2})\pi \neq 0$

أي إن هذه أصفار بسيطة من الدرجة 1 وهي كذلك للدالة f وبفرض أن:

$$\sin z = 0$$

فإن:

$$z = n\pi \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وبما أن $\cos(n\pi) \neq 0$ فإن $\sin'(n\pi) \neq 0$ فهي أصفار بسيطة للدالة $\sin z$ ومن ثمَّ تكون أقطاباً بسيطة (من الدرجة ١) للدالة f.

٥ . إذا كانت f دالة نسبية حيث إن:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

حيث إن Q و P كثيرتا حدود من درجات مختلفة. فإذا وجدت نقطة z_0 تمثل صفراً من الدرجة m للدالة $P(z)$ وصفراً من الدرجة n للدالة $Q(z)$ فإنه يوجد كثيرتا حدود $q(z)$ و $p(z)$ بحيث إن:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(z - z_0)^m P(z)}{(z - z_0)^n q(z)}$$

فإن النقطة z_0 تمثل إحدى الحالات التالية بالنسبة للدالة f.

أ . إذا كانت $m > n$ فإن z_0 نقطة شاذة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة f، وهي كذلك تمثل صفراً من الدرجة $m - n$ للدالة f.

ب . إذا كانت $m < n$ فإن z_0 تمثل قطباً من الدرجة $n - m$ للدالة f.

ج . إذا كانت $m = n$ فإن z_0 تمثل نقطة شاذة قابلة للإزالة بالنسبة للدالة f، ولكنها ليست صفراً لها، أي إنه يمكن إعادة تعريف الدالة f لتكون تحليلية عند z_0 بحيث إن $f(z_0) \neq 0$.

٦ . أوجد نشر لوران للتابع:

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

في جوار الصفر.

توجيه: ما الحلقات التي مركزها الصفر ويكون التابع $f(z)$ تحليلياً في كل منها؟

الحل:

نلاحظ أن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي حلول المعادلة:

$$z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow z_1 = 1 \ , \ z_2 = -2$$

ومن ثمّ يكون التابع $f(z)$ تحليلياً في الحلقات التالية:

$$2 < |z| < \infty \ \ \& \ \ 1 < |z| < 2$$

ونلاحظ أن:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$$

عندما $1 < |z| < 2$.

بحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad ; \quad 1 < |z| < 2$$

وكما نعلم أن c_n ، c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz;\ n>0\quad \& c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz;\ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 > |z| > 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1 < r < 2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$\Rightarrow c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(2z+1)z^{n-1}}{(z+2)(z-1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}\right)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{z+2}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{z-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{z-1}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{z+2}dz=\left[z^{n-1}\right]_{z=1}+0=1$$

$$\Rightarrow c_{-n}=1\ ;\ n>0$$

(فنلاحظ أن التابع المستكمل الأول $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{z-1}dz$ غير تحليلي في النقطة $z=1$ في الحلقة الدائرية $2 > |z| > 1$ ومنه باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى ونكمل كما هو موضح أعلاه، أما بالنسبة للتكامل الثاني فنلاحظ أن التابع المستكمل $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{n-1}}{z+2}dz$ تحليلي في الحلقة الدائرية $2 > |z| > 1$ ومن ثمّ فهو معدوم).

$$\Rightarrow c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{2z+1}{z^{n+1}(z+2)(z-1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z^{n+1}(z+2)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z^{n+1}(z-1)}dz$$

نلاحظ أن التابع المستكمل الأول يفقد تحليليته في النقطة $z = 0$ عندئذ لنعزلها وذلك برسم الدائرة c_0 مركزها الصفر ونصف قطرها صغير بقدرٍ كافٍ، أما بالنسبة

للتكامل الثاني فنلاحظ أنه يفقد تحليليته في النقطة $z = 0,\ z = 1$ عندئذ لنعزلهما وذلك برسم الدائرتين c_0, c_1 مركزها الصفر والواحد على الترتيب ونصف قطرهما صغير بقدرٍ كافٍ عندئذٍ نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z-1}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-1}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z+2}\right]^{(n)}_{z=0} + \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-1}\right]^{(n)}_{z=0} + \left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]_{z=1} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \ \ ; \ n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 2$ هي:

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{2^{n+1}}z^n \quad ; \ 1 < |z| < 2$$

عندما $2 < |z| < \infty$.

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \ 2 < |z| < \infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz \ ; \ n > 0 \ \ \& c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz \ ; \ n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 < |z| < \infty$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $2 < r < \infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$\Rightarrow c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(2z+1)z^{n-1}}{(z+2)(z-1)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \left[\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}\right]z^{n-1}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z+2}dz + \int_c \frac{z^{n-1}}{z-1}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_{-n} = [z^{n-1}]_{z=1} + [z^{n-1}]_{z=-2} = 1 + (-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow c_{-n} = 1 + (-2)^{n-1} \ ; n > 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-1)} + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z+2)}$$

إن التابع الأول المستكمل يفقد تحليليته في النقطتين $z = 0, z = 1$ ومنه لتكن c_0, c_1 دائرتين مركزها $0, 1$ على الترتيب ونصف قطرهما صغير جداً، وأيضاً نلاحظ أن التابع الثاني المستكمل يفقد تحليليته في النقطتين $z = 0, z = 2$ ومنه لتكن c_0, c_2 دائرتين مركزها $0, 2$ على الترتيب ونصف قطرهما صغير جداً ومن ثمّ فإن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z-1}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-1}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+2}dz$$

$$= -1 + 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} = 0 \Rightarrow c_n = 0 \ ; n \geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $2 < |z| < \infty$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2)^{n-1}}{z^n}$$

٧ . أوجد نشر لوران للتابع:

$$f(z) = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}$$

في جوار كل من النقطتين $z_1 = 1 \ \& \ z_2 = 2$

الحل:

إن الحلقات التي مركزها $z_1 = 1$ ويكون $f(z)$ تحليلياً هي التالية:

$$|z - 1| > 1 \ \ , \ \ 0 < |z - 1| < 1$$

عندما $0 < |z - 1| < 1$.

فبحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \quad ; \ 0 < |z - 1| < 1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}} dz \ ; n > 0 \quad \&$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz \quad ; \ n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $0 < |z - 1| < 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 1 ونصف قطرها $0 < r < 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-1)^{-n+1}}\cdot\frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(2z-3)(z-1)^{n-2}}{z-2}dz$$

$$=\begin{cases} n=1\Rightarrow c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{2z-3}{z-2}}{z-1}dz=1 \Rightarrow c_{-1}=1 \ \& \ c_{-n}=0 \ ; n>1 \\ n>1\Rightarrow c_{-n}=0 \end{cases}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z-3}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{2z-3}{z-2}}{(z-1)^{n+2}}dz$$

ومن ثمّ باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتابع المستكمل نجد أن:

$$c_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[2+\frac{1}{z-2}\right]_{z=1}^{(n+2)}=\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^{n+2}}\right]_{z=1}=-1$$

$$\Rightarrow c_n=-1 \ ; n\geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $0<|z-1|<1$ هي:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \ ; 0<|z-1|<1$$

عندما $|z-1|>1$.

فحسب مبرهنة لوران يمكننا نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n \ ; |z-1|>1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادها وفق العلاقات التالية:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz;\ \ n>0\ \&\ c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz\ ;\ n \ge 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $1 < |z - 1|$ التي مركزها مساوٍ لـ 1 ونصف قطرها $r > 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-1)^{-n+1}} \cdot \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z-3}{(z-2)(z-1)^{2-n}}dz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c_1} \frac{\frac{2z-3}{z-2}}{z-1}dz + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c_1} \frac{\frac{2z-3}{z-1}}{z-2}dz = 2 \\ n>1 \Rightarrow c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{(2z-3)(z-1)^{n-2}}{z-2}dz = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{-1} = 2\ \ \&\ \ c_{-n} = 1\ \ ;\ \ n > 2$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \cdot \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z-3}{(z-2)(z-1)^{n+2}}dz$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في النقطتين $z = 1,\ z = 2$ ومنه لنعزلهما بالدائرتين c_1, c_2 التي مركز كل منها هو $1, 2$ على الترتيب ومن ثمَّ فإن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\frac{2z-3}{z-2}}{(z-1)^{n+2}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{2z-3}{(z-1)^{n+2}}}{z-2}dz$$

باستخدام صيغة كوشي الثانية للتابع المستكمل الأول وصيغة كوشي للتابع المستكمل الثاني عندئذ نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[2+\frac{1}{z-2}\right]^{(n+1)}_{z=1} + \left[\frac{2z-3}{(z-1)^{n+1}}\right]_{z=2}$$

$$= \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^{n+2}}\right]_{z=1} + \left[\frac{2z-3}{(z-1)^{n+1}}\right]_{z=2} = -1+1=0 \Rightarrow c_n = 0;\ n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z-1| > 1$ هي:

$$f(z) = \frac{2}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$$

أما من أجل $z_2 = 2$ عندئذ يكون التابع تحليلياً في المناطق التالية:

$$|z-2| > 1\ ,\ 0 < |z-2| < 1$$

عندما $0 < |z-2| < 1$.

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n \quad ;\ 0 < |z-2| < 1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}\,dz\ ;\ n > 0 \quad \&$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}\,dz \quad ;\ n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $0 < |z-2| < 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 2 ونصف قطرها $0 < r < 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z-3}{(z-1)^{2-n}}\,dz$$

$$=\begin{cases} c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \dfrac{\frac{2z-3}{z-1}}{z-2}dz=\left[\dfrac{2z-3}{z-1}\right]_{z=2}=1 \\ n>1\Rightarrow c_{-n}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \dfrac{(2z-3)(z-2)^{n-2}}{z-1}dz=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{-1}=1 \quad \& \quad c_{-n}=0 \quad ; \quad n>1$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-2)^{n+1}}\cdot\frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في النقطة $z = 2$ عندئذ:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{2z-3}{z-1}}{(z-2)^{n+2}}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد أن:

$$c_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{2z-3}{z-1}\right]^{(n+1)}_{z=2}=(-1)^n\Rightarrow c_n=(-1)^n \quad ; \quad n\geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $0 < |z-2|$ هي:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\sum_{2}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \quad ; \quad 0<|z-2|<1$$

عندما $1 < |z-2| < \infty$.

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n \quad ; \quad 1<|z-2|<\infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}dz \; ; n > 0 \;\&\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz \; ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $\infty > |z - 2| > 1$

التي مركزها مساوٍ لـ 2 ونصف قطرها $\infty > r > 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-2)^{-n+1}} \cdot \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z-3}{(z-2)^{2-n}(z-1)}dz$$

$$= \begin{cases} n = 1 \Rightarrow c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c_1} \frac{\frac{2z-3}{z-2}}{z-1}dz + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c_2} \frac{\frac{2z-3}{z-1}}{z-2}dz = 1 \\ n > 1 \Rightarrow c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{(2z-3)(z-2)^{n-2}}{z-1}dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{-1} = 3 \;\;\&\;\; c_{-n} = (-1)^n \;\;;\;\; n > 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-2)^{n+1}} \cdot \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)^{n+2}}dz$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في النقطتين $z = 1 \;,\; z = 2$ ومنه لنعزلهما بالدائرتين c_1, c_2 اللتين مركزهما 1, 2 على الترتيب عندئذ نجد أن:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\frac{2z-3}{(z-2)^{n+2}}}{z-1}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{2z-3}{z-1}}{(z-2)^{n+2}}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكامل الأول وصيغة كوشي التكاملية الثانية للتكامل الثاني عندئذ نجد أن:

$$c_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0 \Rightarrow c_n = 0 \;;\; n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z-2| > 1$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n} \quad ; \quad |z-2| > 1$$

٨ . أوجد نشر لوران لكل من التوابع الآتية في الحلقة المبينة بجانب كل تابع منها:

$$1)\ \frac{1}{(z-2)(z-3)} \;;\; 2 < |z| < 3 \;,\; 2 < |z| < \infty$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

عندما $2 < |z| < 3$.

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad ; \quad 2 < |z| < 3$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz \quad ; \quad n > 0 \quad \& c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 < |z| < 3$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $2 < r < 3$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z-3} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z-2} dz = -2^{n-1}$$

$$\Rightarrow c_{-n} = -2^{n-1} \;;\; n > 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{1}{(z-3)(z-2)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-3)} - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z-3}}{z^{n+1}}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z-2}}{z^{n+1}}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-2}dz$$

(وذلك حيث c_0 دائرة مركزها 0 ونصف قطرها صغير جداً و c_2 دائرة مركزها 2 ونصف قطرها صغير جداً) ومن ثمَّ باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملين الأول والثاني وباستخدام صيغة كوشي الأولى للتكامل الثالث نجد أن:

$$c_n = \left[\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}\right]_{z=0} - \left[\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}\right]_{z=0} - \left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow c_n = -\frac{1}{3^{n+1}} \quad ; \; n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $2 < |z| < 3$ هي:

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad ; \; 2 < |z| < 3$$

عندما $2 < |z| < \infty$.

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته عند $z = 3$ ومن ثمَّ لا يمكن نشر $f(z)$ حسب لوران في المنطقة $2 < |z| < \infty$.

2) $\dfrac{1}{z^2+z} \quad ; \quad 0 < |z| 1 \quad , \quad 1 < |z| < \infty$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$$

عندما $0<|z|<1$.

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad 0<|z|<1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \; ; n>0 \;\&\; c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \; ; n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $0<|z|<1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $0<r<1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-2}}{z+2}dz$$

$$=\begin{cases} n=1\Rightarrow c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{\frac{1}{z+1}}{z}dz=1 \\ n>1\Rightarrow c_{-n}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{dz}{(z+1)z^{2-n}}=0 \end{cases} \Rightarrow c_{-1}=1, c_{-n}=0; n>1$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{1}{z(z+1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{(z+1)z^{n+2}}-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{z+1}}{z^{n+2}}dz$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)}\right]_{z=0}^{(n+1)}=(-1)^{n+1}\Rightarrow c_n=(-1)^{n+1}\ ;\ n\geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 > |z| , 0$ هي:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n\quad ;\quad 0<|z|<1$$

عندما $1 < |z| < \infty$.

حسب مبرهنة لوران يمكننا نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\ \ ;\ 1<|z|<\infty$$

وكما نعلم أن c_n,c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz\ \ n>0\ \&\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ ;\ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $\infty > |z| > 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $\infty > r > 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\frac{1}{z+1}}{(z+1)z^{2-n}}dz$$

$$=\begin{cases}n=1\Rightarrow c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c\frac{dz}{z(z+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+1}}{z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-1}}\frac{\frac{1}{z}}{z+1}dz=0\\ \qquad n>1\Rightarrow c_{-n}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c\frac{z^{n-2}}{z+1}dz=(-1)^{n-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{-1}=0\ \&\ c_{-n}=(-1)^n\ \ ;\ \ n>1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}.z.(z+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+2}(z+1)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z^{n+2}}}{z+1}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-1}} \frac{\frac{1}{z+1}}{z^{n+2}}dz = \frac{1}{(-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{1^{n+2}}$$

$$= (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow c_n = 0 \quad ; \quad n \geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 1$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}$$

3) $\dfrac{1}{(z+2)(z^2+1)} \quad ; \quad 1 < |z| < 4 \;,\; 4 < |z| < \infty$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{(z+2)(z^2+1)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{2i-1}{10}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{2i-1}{10}\cdot\frac{1}{z-i}$$

عندما $1 < |z| < 4$.

لا يمكن نشر هذا التابع في المنطقة $1 < |z| < 4$ لأنه غير تحليلي فيها (في النقطة $z = -2$).

عندما $4 < |z| < \infty$.

حسب مبرهنة لوران يمكننا نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad ; \quad 4 < |z| < \infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz\ ;\ n>0\quad \&\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\quad ;\ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $\infty > |z| > 4$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $4 < r < \infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{1}{(z+2)(z^2+1)}dz$$

$$=\frac{1}{5}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^{n-1}}{z+2}dz+\frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z+i}dz-\frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z-i}$$

باستخدام صيغة كوشي الأولى للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_{-n}=\frac{1}{5}(-2)^{n-1}+\frac{2i-1}{10}(-i)^{n-1}-\frac{2i-1}{10}i^{n-1}$$

$$\Rightarrow c_{-n}=\frac{1}{5}(-2)^{n-1}+\frac{2i-1}{10}(-i)^{n-1}-\frac{2i-1}{10}i^{n-1}\quad ;\ n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{1}{(z+2)(z^2+1)}dz$$

$$=\frac{1}{5}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+1}(z+2)}+\frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+1}(z+i)}-\frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+1}(z-i)}$$

نلاحظ أن التابع الأول المستكمل يفقد تحليليه في النقطتين $z = 0, z = -2$ ومنه لعزلهما وذلك برسم الدائرتين $c_0,\ \ c_{-2}$ اللتين نصف قطرهما صغير بقدرٍ كافٍ وأما بالنسبة للتكامل الثاني فيفقد تحليليته في النقطتين $z = 0, z = -i$ والآن لنعزلهما وذلك برسم الدائرتين c_0, c_{-i} اللتين نصف قطرهما صغير بقدرٍ كافٍ وبالنسبة للتكامل الثالث

فيفقد تحليليته في النقطتين $z = 0, z = i$ وأيضاً لنعزلهما وذلك برسم الدائرتين c_0, c_i اللتين نصف قطرهما صغير بقدر كافٍ ومنه بالتعويض نجد أن:

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{5}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+2}dz + \frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+i}}{z^{n+1}}dz$$

$$+ \frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-i}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+i}dz - \frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i}\frac{\frac{1}{z-i}}{z^{n+1}}dz - \frac{2i-1}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-i}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-i}dz$$

باستخدام صيغة كوشي الأولى للتكاملات الثاني والرابع والسادس وباستخدام الصيغة الثانية للتكاملين الأول والثالث والخامس نجد أن:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{5\cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{5(-2)^{n+1}} + \frac{(2i-1)(-1)^n}{10\cdot i^{n+1}} + \frac{2i-1}{10\cdot(-i)^{n+1}} - \frac{(2i-1)(-1)^n}{10\cdot(-i)^{n+1}}$$

$$-\frac{2i-1}{10\cdot i^{n+1}} = 0 \Rightarrow c_n = 0 \ ; \ n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $4 < |z| < \infty$ هي:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{5}(-2)^{n-1} + \frac{2i-1}{10}(-i)^{n-1} - \frac{2i-1}{10}i^{n-1}\right]\cdot\frac{1}{z^n}$$

4) $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2} \quad ; \quad 1 < |z| < 2$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{2z+3}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}$$

بحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad 1<|z|<2$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \ ; n>0 \ \ \& \ \ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad ; \ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $1 < |z| < 2$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1<r<2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{0}^{\infty}c_n z^n$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z+3}{(z+1)(z+2)z^{-n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{(2z+3)z^{n-1}}{z+2}}{z+1}dz=(-1)^{n-1} \Rightarrow c_{-n}=(-1)^{n-1} \quad ; \ n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z+1)}+\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{2z+3}{z^{n+1}(z+2)}dz$$

نلاحظ أن تابع التكامل الأول يفقد تحليليته في النقطتين $z=-1$ ، $z=0$

ولنرسم الدائرتين c_0, c_{-1} اللتين مركزها -1 ، 0 على الترتيب ونصف قطرهما صغير بقدرٍ كافٍ ومنه:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+1}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-1}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+1}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz$$

$$= (-1)^n - (-1)^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Rightarrow c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \;\; ; n \geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 2$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$$

5) $\dfrac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2} \quad ; \quad |z| < 1 \;\; , \;\; 1 < |z| < 2 \;\; , \;\; 2 < |z| < \infty$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

عندما $|z| < 1$.

نلاحظ حسب مبرهنة لوران أنه يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \;\; ; \;\; 1 < |z| < \infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \;\; ; \; n > 0 \;\; \& \;\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \; ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $|z| < 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $r < 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \quad ; \ |z| < 1$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z^{-n+1}} \cdot \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z+2} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} dz = 0 \ ; n > 0$$

(إن التكاملين السابقين معدومان كونهما تحليليين في المنطقة $|z| < 1$).

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{z^{n+1}} dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد أن:

$$c_n = \left[\frac{(-1)^n}{(z+2)^{n+1}} \right]_{z=0} + \left[\frac{(-1)^n (n+1)}{(z-1)^{n+2}} \right]_{z=0} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + n + 1 \ ; n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z| < 1$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + n + 1 \right) z^n \quad ; |z| < 1$$

عندما $1 < |z| < 2$.

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ ; 1 < |z| < 2$$

وكمـا نعلـم أن c_n, c_{-n} معـاملات المتسلسـلتين السـابقتين يمكـن إيجادهمـا وفـق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \ ; n > 0 \ \& \ c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \ ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 > |z| > 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1 < r < 2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}} \cdot \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}} \cdot \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+1)^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z+2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2}dz$$

نلاحظ أن التكامل الأول تحليلي في C ومن ثمّ فالتكامل معدوم، أما بالنسبة للتكامل الثاني فباستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد أن:

$$c_{-n} = [(n-1)z^{n-2}]_{z=1} = n - 1 \Rightarrow c_{-n} = n - 1 \ ; \ n > 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}} \cdot \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z-1)^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z+2)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z-1)^2}dz$$

نلاحظ أن التكامل الأول يفقد تحليليته في النقطة $z = 0$، وأما بالنسبة للتكامل الثاني فنلاحظ أنه يفقد تحليليته في النقطتين $z = 0, z = 1$ ومنه لنرسم c_0 دائرة مركزها

الصفر ونصف قطرها صغير جداً ولنرسم c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً ومن ثمَّ فإن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{(z-1)^2}dz$$

باستخدام صيغة كوشي الثانية للتكاملات السابقة نجد أن:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n+1)}{(-1)^{n+1}} + n + 1 \Rightarrow c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \quad ; \; n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 2$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n \quad ; \; 1 < |z| < 2$$

عندما $2 < |z| < \infty$.

نلاحظ حسب مبرهنة لوران أن نشر للتابع المعطى بمتسلسلة لوران يكون من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \; 2 < |z| < \infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \; ; n > 0 \;\&\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \; ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 < |z| < \infty$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $2 < r < \infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \; 2 < |z| < \infty$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\left(\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z+1)^2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{-n+1}}{z+2}+dz\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{-n+1}}{(z-1)^2}dz$$

نلاحظ أن التكامل الأول يفقد تحليليته في النقطة $z = -2$ والتكامل الثاني يفقد تحليليته في النقطة $z = 1$ باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكامل الأول وصيغة كوشي التكاملية الثانية للتكامل الثاني فنجد أن:

$$c_{-n}=[z^{n-1}]_{z=-2}+\frac{1}{1!}[z^{n-1}]'_{z=1}=2^{n-1}+n-1$$

$$\Rightarrow c_{-n}=2^{n-1}+n-1 \;\; ; \;\; n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left(\frac{1}{z+2}+\frac{1}{(z+1)^2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z+2)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z-1)^2}dz$$

لتكن c_0 دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_{-2} دائرة مركزها 2- ونصف قطرها صغير جداً ومنه:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+2}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{(z-1)^2}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكامل الثاني وصيغة كوشي التكاملية الثانية لبقية التكاملات فنجد أن:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{(-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n+1)}{(-1)^{n+2}} - (n+1) = 0 \Rightarrow c_n = 0 \ ; n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $2 < |z| < \infty$ هي:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + n - 1}{z^n} \ ; \ 2 < |z| < \infty$$

$$6 - \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} \ ; \ 1 < |z| < 2$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z+2} - \frac{1}{6} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6} \frac{1}{z+1}$$

فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f \mid z \mid = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

وحيث:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz \ ; n > 0 \ \& \ c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \ ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 > |z| > 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1 < r < 2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z^{-n+1}} \left[\frac{1}{(z^2-4)(z^2-1)} \right] dz$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^n}{z-2}dz+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^n}{z+2}dz-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^n}{z-1}dz$$
$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^n}{z+1}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملات السابقة نجد أن:

$$c_{-n}=0+0-\frac{1}{6}-\frac{(-1)^n}{6}\Rightarrow c_{-n}=-\frac{1}{6}-\frac{(-1)^n}{6}\ ;n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{zdz}{z^{n+1}(z^2-1)(z^2-4)}$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في النقاط $z=1$، $z=-1$، $z=0$

ولتكن c_0 دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً ومنه فإن:

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{z}{(z^2-1)(z^2-4)}}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z^n(z+1)(z^2-4)}}{z-1}dz$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-1}}\frac{\frac{1}{z^n(z-1)(z^2-4)}}{z+1}dz$$

ومنه باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكامل الأول وباستخدام صيغة كوشي الأولى للتكاملين الثاني والثالث فإن:

$$c_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{z}{(z^2-1)(z^2-4)}\right]^{(n)}_{z=0}+\left[\frac{1}{z^n(z+1)(z^2-4)}\right]_{z=1}$$
$$+\left[\frac{1}{z^n(z-1)(z^2-4)}\right]_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{6}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right]^{(n)}_{z=0}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6(-1)^n}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{(-1)^n}{(-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{1^{n+1}}\right]-\frac{1}{6}-\frac{(-1)^n}{6}$$

$$=\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow c_n=\frac{1}{6}\left(\frac{(-1)^n-1}{2^{n+1}}\right)\ ;\ n\geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1<|z|<2$ هي:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{6}+\frac{(-1)^n}{6}\right]\cdot\frac{1}{z^n}+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{2^{n+1}}\right]\cdot z^n$$

7 - $\dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}\quad;\quad 2<|z|<\infty$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{(z^2-4)^2}=-\frac{1}{16}\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{1}{32}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{16}\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{32}\frac{1}{z-2}$$

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_n z_n\ ;\ 2<|z|<\infty$$

وكما نعلم أن c_n معامل المتسلسلة السابقة فيمكن إيجاده وفق العلاقة التالية:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n+1}}\left[\frac{z^5}{(z^2-4)^2}\right]dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n-4}(z^2-4)^2}dz$$

فنميز حالتين:

الحالة الأولى: $n-4<0$

عندئذ نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في الحلقة $\infty > |z| > 2$ في النقطتين 2- ,2 ومنه حسب كوشي نجد أن:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n-4}(z^2-4)^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{\frac{1}{z^{n-4}(z+4)^2}}{(z-2)^2}dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{1}{z^{n-4}(z-2)^2}}{(z+2)^2}dz$$

$$=\left[\frac{1}{z^{n-4}(z+2)^2}\right]'_{z=2}+\left[\frac{1}{z^{n-4}(z2)^2}\right]'_{z=-2}$$

$$=\left[z^{4-n}(z+2)^{-2}\right]'_{z=2}+\left[z^{4-n}(z-2)^{-2}\right]'_{z=-2}$$

$$=\left[z^{4-n}(z+2)^{-2}\right]'_{z=2}+\left[z^{4-n}(z-2)^{-2}\right]'_{z=-2}$$

$$=\left[(4-n)z^{4-n}(z+2)^{-2}-2(z+2)^{-3}z^{4-n}\right]_{z=2}$$

$$+\left[(4-n)z^{4-n}(z-2)^{-2}-2(z-2)^{-3}z^{4-n}\right]_{z=-2}$$

$$=(4-n)2^{4-n}(4)^{-2}-2(4)^{-3}2^{4-n}+(4-n)(-2)^{4-n}(-4)^{-2}-2(-4)^{-3}(-2)^{4-n}$$

$$=(4-n)2^{4-n}2^{-4}-2\cdot 2^{-6}2^{4-n}+(4-n)(-2)^{4-n}(-2)^{-4}-(-2)(-2)^{-6}(-2)^{4-n}$$

$$=(3-n)2^{-(n+1)}+(3-n)(-2)^{-(n+1)}=\frac{3-n}{2^{n+1}}+\frac{3-n}{(-2)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow c_n=\frac{3-n}{2^{n+1}}+\frac{3-n}{(-2)^{n+1}}\quad ;\ n\le 3$$

الحالة الثانية: $0 \ge n-4 \Leftarrow n \ge 4$.

عندئذ نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في الحلقة $\infty > |z| > 2$ في النقطتين 2- ,2 ومنه حسب كوشي نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n-4}(z^2-4)^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{(z^2-4)^2}}{z^{n-4}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{1}{z^{n-4}(z+2)^2}}{(z-4)^2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}} \frac{\frac{1}{z^{n-4}(z-2)^2}}{(z+2)^2}\,dz$$

$$= \left[\frac{1}{(z^2-4)^2}\right]^{(n-5)}_{z=0} + \left[\frac{1}{z^{n-4}(z+2)^2}\right]'_{z=2} + \left[\frac{1}{z^{n-4}(z-2)^2}\right]'_{z=-2}$$

$$= \left[-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{z-2}\right]^{(n-5)}_{z=0}$$

$$+ \left[z^{4-n}(z+2)^{-2}\right]'_{z=2} + \left[z^{4-n}(z-2)^{-2}\right]'_{z=-2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{(0+2)^{n-3}} + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{(0+2)^{n-4}} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{(0-2)^{n-3}} + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{(0-2)^{n-4}}\right]_{z=0}$$

$$+[(4-n)z^{4-n}(z+2)^{-2} - 2(z+2)^{-3}z^{4-n}]_{z=2}$$

$$+[(4-n)z^{4-n}(z-2)^{-2} - 2(z-2)^{-3}z^{4-n}]_{z=-2}$$

$$= -\frac{1}{24}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{2^{n-4}} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{(-2)^{n-3}} + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{(-1)^{n-5}}{(-2)^{n-4}}$$

$$+(4-n)2^{4-n}(4)^{-2} - 2(4)^{-3}2^{4-n} + (4-n)(-2)^{4-n}(-4)^{-2} - 2(-4)^{-3}(-2)^{4-n}$$

$$= -\frac{(-1)^{n-5}}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-5}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} + (4-n)2^{4-n}2^{-4} - 2\cdot 2^{-6}2^{4-n}$$

$$+ (4-n)(-2)^{4-n}(-2)^{-4} - (-2)(-2)^{-6}(-2)^{4-n}$$

$$= (3-n)\,2^{-(n+1)} + (3-n)\,(-2)^{-(n+1)} = \frac{3-n}{2^{n+1}} + \frac{3-n}{(-2)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{3-n}{2^{n+1}} + \frac{3-n}{(-2)^{n+1}} \quad ; \; n \geq 3$$

وبالتالي تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $2 < |z| < \infty$ هي:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{3-n}{2^{n+1}} + \frac{3-n}{(-2)^{n+1}}\right)z^n$$

8 - $\dfrac{1}{(z^2-4)^2} \quad ; \; 2 < |z+2| < \infty$

الحل:

نلاحظ أن التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في النقطة $z = 2$ ومن ثمَّ لا يمكن نشر التابع المعطى حسب لوران في النقطة $2 < |z+2| < \infty$.

٤ . انشر الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$$

وذلك ضمن المناطق التالية:

$$|z| < 1 \; , \; 1 < |z| < 2 \; , \; |z| > 2 \; , \; 0 < |z-1| < 1$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

عندما $|z| < 1$:

بحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad |z|<1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \ ; n>0 \ \& \ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \ ; n\ge 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $|z|<1$ والتي مركزها مساوي لـ 0 ونصف قطرها $r<1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad |z|<1$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}dz=0\Rightarrow c_{-n}=0 ;n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right]dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد أن:

$$c_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right]_{z=0}^{(n)}=1-\frac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow c_n=1-\frac{1}{2^{n+1}} \ ; n\ge 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z|<1$ هي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \quad ; \quad |z|<1$$

عندما $1<|z|<2$:

فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad 1<|z|<2$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \;;\; n>0 \;\&\; c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \;;\; n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $1<|z|<2$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1<r<2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{1}{z^2-3z+2}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c z^{n-1}\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z-2}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z-1}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكامل الثاني نجد أن:

$$c_{-n}=-1 \;;\; n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{1}{z^2-3z+2}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)}-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-1)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{\frac{1}{z-2}}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z-1}}{z^{n+1}}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{(z-1)}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملين السابقين الأول والثاني وصيغة كوشي التكاملية الأولى للتكامل الثالث نجد أن:

$$c_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-2}\right]_{z=0}^{(n)}+\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-1}\right]_{z=0}^{(n)}+\left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n\cdot n!}{(z-2)^{n+1}}\right]_{z=0}+\frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n\cdot n!}{(z-1)^{n+1}}\right]_{z=0}+1$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}-1+1=-\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$c_n=-\frac{1}{2^{n+1}}\quad ;\ n\geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1<|z|<2$ هي:

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\ ;\ 1<|z|<2$$

عندما $|z|>2$:

نعلم حسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\quad ;\quad 2<|z|<\infty$$

وكما نعلم أن c_n,c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz\ ;\ n>0\ \&\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ ;\ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 < |z| < \infty$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $2 < r < \infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{1}{z^2-3z+2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c z^{n-1}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

لتكن c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_2 دائرة مركزها 2 ونصف قطرها صغير جداً ومنه فإن:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z-2}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z-1}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_{-n} = 2^{n-1} - 1 \;\; ; \;\; n > 0$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{1}{z^2-3z+2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-2)} - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}(z-1)}$$

لتكن c_0 دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_2 دائرة مركزها 2 ونصف قطرها صغير جداً ومنه فإن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z-2}}{z^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-2}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{z-1}}{z^{n+1}}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-1}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين الثاني والرابع وصيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملين الأول والثالث نجد أن:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(-2)^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} - 1 = 0$$

$$c_n = 0 \; ; \; n \geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z| > 2$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n} \; ; \; 2 < |z| < \infty$$

$$0 < |z-1| < 1$$

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل الآتي:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \; ; 0 < |z-1| < 1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}} dz \; ; n > 0 \; \& \; c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} dz ; n \geq 1$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $0 < |z - 1| < 1$ التي مركزها مساوٍ لـ 1 ونصف قطرها $0 < r < 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{(z-1)^{-n+1}} \cdot \frac{1}{z^2 - 3z + 2} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{(z-1)^{-n+1}} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{(z-1)^{-n+1}(z-2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{(z-1)^{-n+2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(z-1)^{n-1}}{(z-2)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_c (z-1)^{n-2}dz=1-0=1$$

$$\Rightarrow c_{-n}=0\ ;\ n>0\ ;\ C_{-1}=-1$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{z^2-3z+2}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(z-1)^{n+1}}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{(z-1)^{-n+1}(z-2)}-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{(z-1)^{n+2}}$$

لتكن c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً ومنه فإن:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^{n+1}}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dz}{(z-1)^{n+2}}$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-2}\right]_{z=1}^{(n)}-\frac{1}{(n+1)!}[1]_{z=1}^{(n+1)}=\frac{1}{n!}\left[\frac{n!(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}\right]=\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}=-1$$

$$\Rightarrow c_n=-1\ ;\ n\geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $0<|z-1|<1$ هي:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\quad ;\ 0<|z-1|<1$$

٩ . انشر الدالة:
$$f(z)=\frac{z^2-z}{(1-z)(1+z^2)}$$

حسب لوران في المناطق التالية:

$$|z|<1\ ,\ 0<|z-i|<1\ ,\ |z|>1$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{z^2-z}{(1-z)(z^2+1)}=\frac{-z}{z^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i+z}$$

عندما $|z|<1$:

فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران وذلك لأن التابع المعطى تحليلي من المنطقة المفروضة من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad |z|<1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \ ; n>0 \ \& \ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \ ; n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $|z|<1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $r<1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\left[\frac{z^2-z}{(1-z)(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{i-z}dz-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{i+z}dz=0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{z^2-z}{(1-z)(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{1}{z^{n+1}(i-z)}dz-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{1}{z^{n+1}(i+z)}dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z-i}}{z^{n+1}}dz-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+i}}{z^{n+1}}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{(-i)^{n+1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{i^{n+1}} = \frac{1+(-1)^n}{2\cdot i^{n+1}}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1+(-1)^n}{2\cdot i^{n+1}} \;\; ; \;\; n \geq 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2\cdot i^{n+1}}\right)z^n \;\; ; \;\; |z| < 1$$

عندما $0 < |z-i| < 1$:

فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n \;\; ; \;\; 0 < |z-i| < 1$$

وذلك لأن التابع المفروض تحليلي في المنطقة المفروضة، وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-i)^{-n+1}}dz \; ; \; n > 0 \;\&\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}dz \; ; \; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $0 < |z-i| < 1$ التي مركزها مساوٍ لـ i ونصف قطرها $0 < r < 1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-i)^{-n+1}}dz \quad ; \quad n \geq 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^2 - z}{(z-i)^{-n+1}(1-z)(1+z^2)}dz \;\; ; \;\; n \geq 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z(z-1)}{(z-i)^{-n+1}(1-z)(1+z^2)}dz \;\; ; \;\; n \geq 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{-z}{(z-i)^{-n+1}(i+z)(z-i)}dz \;\; ; \;\; n \geq 1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{-z}{(z+i)(z-i)^{-n+2}}dz \quad ; \quad n\geq 1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{-z(z-i)^{n-2}}{(z+i)}dz \quad ; \quad n\geq 1$$

$$n=1\Rightarrow c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{-z}{(i+z)(z-i)}dz$$

والتابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الدائرة c وذلك في النقطة $z = i$ وبالتالي حسب صيغة كوشي التكاملية الأولى نجد:

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i}\frac{\frac{-z}{z+i}}{z-i}dz=\left[\frac{-z}{z+i}\right]_{z=i}=-\frac{1}{2}$$

$$n\geq 2\Rightarrow c_{-n}=0$$

وذلك لأن التابع المستكمل تحليلي داخل الدائرة c التي نكامل عليها.

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{-z}{(z+i)(z-i)^{n+2}}dz$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الدائرة c وذلك في النقطة $z = i$ وعلاوةً على ذلك نأخذ دائرة صغيرة نصف قطرها صغير بقدر كافٍ مركزها i ويكون:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i}\frac{\frac{-z}{z+i}}{(z-i)^{n+2}}dz \quad ; \quad n\geq 0$$

وبتطبيق صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد:

$$c_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{-z}{z+i}\right]^{(n+1)}_{z=i} \quad ; \quad n\geq 0$$

$$c_n=\frac{i(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}} \quad ; \quad n\geq 0$$

عندئذ تكون متسلسلة لوران في المنطقة المذكورة هي:

$$f(z)=\frac{-1}{2(z-i)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}}(z-i)^n$$

وحيث: $0<|z-i|<1$

عندما $|z|>1$:

بما أن التابع المعطى تحليلي في هذه المنطقة، فحسب مبرهنة لوران فيمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad ; \quad |z|>1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \ ; \ n>0 \ \& \ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \ ; \ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $1<|z|<\infty$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1<r<\infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{-n+1}}\left[\frac{z^2-z}{(1-z)(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^{n-1}}{i-z}dz-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^{n-1}}{i+z}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين السابقين نجد أن:

$$c_{-n}=-\frac{i^{n-1}}{2}-\frac{(-i)^{n-1}}{2}\Rightarrow c_{-n}=\frac{\left((-1)^n-1\right)i^{n-1}}{2} \quad ; n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{z^2-z}{(1-z)(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i+z}\right]dz$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z-i)}dz-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}(z+i)}dz$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-i}dz-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-i}} \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+i}dz$$

$$=\frac{-1}{2\cdot i^{n+1}}-\frac{1}{2\cdot(-i)^{n+1}}=\frac{1}{2\cdot i^{n-1}}-\frac{1}{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot i^{n+1}}=\frac{1}{2\cdot i^{n-1}}+\frac{1}{2}(i)^{n+1}$$

$$\Rightarrow c_n=\frac{i^{n+1}+i^{1-n}}{2}\quad ;\ n\geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z| > 1$ هي:

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{((-1)^n-1)i^{n-1}}{2}\cdot\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i^{n+1}+i^{1-n}}{2}\right)z^n\ \ ;|z|>1$$

١٠ . أوجد متسلسلة لوران للدالة:

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

في المنطقة $0 < |z-1|$.

الحل:

نلاحظ أن البسط دالة تحليلية في جميع نقاط المستوي ومن ثمَّ لإيجاد نشر لوران

نفرض أن: $z-1=t\Rightarrow z=t+1$

$$F(t)=\frac{e^{2(t+1)}}{t^3}=\frac{e^2}{t^3}\cdot e^{2t}=\frac{e^2}{t^3}\cdot\left[1+2t+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\frac{(2t)^4}{4!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{e^2}{t^3}+\frac{2e^2}{t^2}+\frac{2e^2}{t}+e^2\cdot\sum_0^\infty\frac{2^{n+3}}{(n+3)!}\cdot t^n$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+e^2\cdot\sum_0^\infty\frac{2^{n+3}}{(n+3)!}\cdot(z-1)^n$$

١١ . أوجد متسلسلة لوران لكل من التوابع الآتية في المناطق التالية:

$$1)\ f(z)=\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}\ ;\ |z|>2\quad ,\quad 1<|z|<2$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}$$

عندما $1<|z|<2$:

بما أن التابع تحليلي في هذه المنطقة، فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^\infty\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^\infty c_n z^n\quad ;\ 1<|z|<2$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz\ ;\ n>0\ \&\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ ;\ n\ge 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $1<|z|<2$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $1<r<2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$f(z)=\sum_1^\infty\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_0^\infty c_n z^n\quad ;\ 1<|z|<2$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\left[\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}\right]dz$$

$$=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z+i}dz+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z-i}dz-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{z+2}dz$$

نلاحظ أن التكامل الأخير معدوم كون التابع المستكمل تحليلياً في المنطقة المدروسة، أما بالنسبة للتكامل الأول والثاني فنجد باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى أن:

$$c_{-n}=\frac{2+i}{10}(-i)^{n-1}+\frac{2-i}{10}i^{n-1}$$

$$\Rightarrow c_{-n}=\left[\frac{(2+i)(-1)^{n-1}+2-i}{10}\right]i^{n-1}\ \ ;\ n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}\right]dz$$

$$=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+i}}{z^{n+1}}dz+\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-i}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{(z+i)}dz+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z-i}}{z^{n+1}}dz$$

$$+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-i}dz-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين الثاني والرابع وباستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملات الأول والثالث والخامس نجد أن:

$$c_n=\frac{2+i}{10}\left[\frac{(-1)^n}{(i)^{n+1}}\right]+\frac{2+i}{10}\left[\frac{1}{(-i)^{n+1}}\right]+\frac{2-i}{10}\left[\frac{(-1)^n}{(-i)^{n+1}}\right]+\frac{2-i}{10}\left[\frac{1}{(i)^{n+1}}\right]$$

$$-\frac{2}{5}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]\ \Rightarrow\ c_n=\frac{(-1)^{n+1}}{5\cdot 2^n}\ \ ;\ n\geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1<|z|<2$ هي:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2+i)(-1)^{n-1}+2-i}{10}\right]\cdot\frac{i^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5\cdot 2^n}z^n$$

عندما $2<|z|<\infty$:

كما نعلم حسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\ \ ;\ 2<|z|<\infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz\ ;\ n>0\ \&\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ ;\ n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2<|z|<\infty$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $2<r<\infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\left[\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}\right]dz$$

لتكن c_i دائرة مركزها i ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_{-i} دائرة مركزها $-i$ ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_{-2} دائرة مركزها -2 ونصف قطرها صغير جداً ومنه نجد أن:

$$c_{-n}=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-i}}\frac{z^{n-1}}{z+i}dz+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i}\frac{z^{n-1}}{z-i}dz-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{z^{n-1}}{z+2}$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملات السابقة نجد أن:

$$c_{-n}=\frac{2+i}{10}(-i)^{n-1}+\frac{2-i}{10}(i)^{n-1}-\frac{2}{5}(-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow c_{-n}=\frac{(2+i)(-i)^{n-1}+(2-i)i^{n-1}+(-1)^n 2^{n+1}}{10}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{z}{(z^2+1)(z+2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\left[\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}\right]dz$$

$$=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+1}(z+i)}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+1}(z-i)}$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+1}(z+2)}$$

$$=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+i}}{z^{n+1}}dz+\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-i}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+i}dz+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z-i}}{z^{n+1}}dz$$

$$+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_i}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z-i}dz-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{z+2}}{z^{n+1}}dz-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{z+2}dz$$

باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملات الثاني والرابع والسادس وباستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكاملات الأول والثالث والخامس نجد أن:

$$c_n=\frac{2+i}{10}\cdot\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z+i}\right]^{(n)}_{z=0}+\frac{2+i}{10}\left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]_{z=-i}+\frac{2-i}{10}\cdot\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z-i}\right]^{(n)}_{z=0}$$

$$+\frac{2-i}{10}\left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]_{z=i}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{z+2}\right]^{(n)}_{z=0}-\frac{2}{5}\cdot\left[\frac{1}{z^{n+1}}\right]_{z=-2}=0$$

(تأكد من ذلك بالاشتقاق والتعويض كما في الأمثلة السابقة).

$$\Rightarrow c_n=0\ ;\ n\geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $2<|z|<\infty$ هي:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2+i)(-i)^{n-1}+(2-i)i^{n-1}+(-1)^n2^{n+1}}{10}\right]\cdot\frac{1}{z^n}$$

$$2)\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\ ;\ |z|>2\quad ,\quad 0<|z|<1$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{z+2}$$

عندما $0<|z|<1$: بما أن التابع المعطى تحليلي في المنطقة المذكورة، فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_nz^n\ ;\ 0<|z|<1$$

ويعطى معامل متسلسلة لوران بالشكل التالي:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z^{n+1}}\left[\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z^{n+3}(z-1)(z+2)}$$

فهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $n + 3 \le 0$:

فنلاحظ حسب مبرهنة كوشي أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+3}(z-1)(z+2)}$$

يكون التابع المستكمل تحليلياً من أجل جميع القيم الواقعة داخل المنحني C ويكون التكامل معدوماً أي:

$$\Rightarrow c_n = 0 \ , \ n \le -3$$

الحالة الثانية: $n + 3 > 0$:

عندها نلاحظ أن التابع يفقد تحليليته داخل المنحني C في النقطة $z = 0$ ومن ثمَّ نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+3}(z-1)(z+2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{(z-1)(z+2)}}{z^{n+3}}dz$$

ومنه باستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{(z-1)(z+2)}}{z^{n+3}}dz = \frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right]_{z=0}^{(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2}\right]_{z=0}^{(n+2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^{n+2}}{(z-1)^{n+3}} - \frac{(-1)^{n+2}}{(z+2)^{n+3}}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}\right]$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{3}\left[-1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}\right] \;,\; n \geq -2$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $1 > |z| > 0$ هي:

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=-2}^{\infty}\left(-1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}\right)z^n \;\; ; \;\; 0 < |z| < 1$$

عندما $2 < |z|$.

فحسب مبرهنة لوران التابع المعطى تحليلي في المنطقة المذكورة إذاً يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \;\; ; 2 < |z| < \infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \;;\; n > 0 \;\;\&\;\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \;;\; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $\infty > |z| > 2$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $\infty > r > 2$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\left[\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-3}}{(z-1)(z+2)}dz$$

$$n = 1 \Rightarrow c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^2(z-1)(z+2)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{(Z-1)(Z+2)}}{z^2}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z^2(Z+2)}}{(z-1)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{1}{z^2(Z-1)}}{(z+2)}dz$$

$$=\left[\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right]'_{z=0}+\left[\frac{1}{z^2(z+2)}\right]_{z=1}+\left[\frac{1}{z^2(z-1)}\right]_{z=-2}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=0$$

$$n=2\Rightarrow c_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z(z-1)(z+2)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{(z-1)(z+2)}}{z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z(z+2)}}{(z-1)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{1}{z(z-1)}}{(z+2)}dz$$

$$=\left[\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right]_{z=0}+\left[\frac{1}{z(z+2)}\right]_{z=1}+\left[\frac{1}{z(z-1)}\right]_{z=-2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=0$$

$$n\geq 3\Rightarrow c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^{n-3}}{(z-1)(z+2)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{z^{n-3}}{(z+2)}}{(z-1)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\frac{\frac{z^{n-3}}{(z-1)}}{(z+2)}dz$$

$$=\left[\frac{z^{n-3}}{(z+2)}\right]_{z=1}+\left[\frac{z^{n-3}}{(z-1)}\right]_{z=-2}=\frac{1-(-2)^{n-3}}{3}$$

$$\Rightarrow c_{-1}=0\ \&\ c_{-2}=0\ \&\ c_{-n}=\frac{1-(-2)^{n-3}}{3}\ ;\ n\geq 3$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\left[\frac{1}{z^2(z-1)(z+2)}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+3}(z-1)(z+2)}$$

لتكن c_0 دائرة مركزها الصفر .ونصف قطرها صغير جداً، ولتكن c_1 دائرة مركزها الواحد ونصف قطرها صغير جداً، ولتكن c_{-2} دائرة مركزها 2- ونصف قطرها صغير جداً ومنه:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} \frac{\frac{1}{(z-1)(z+2)}}{z^{n+3}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\left[\frac{\frac{1}{z^{n+3}(z+2)}}{z-1}\right]dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-2}}\left[\frac{\frac{1}{z^{n+3}(z-1)}}{z+2}\right]dz$$

ومن ثمّ باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين الثاني والثالث وباستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكامل الأول نجد أن:

$$c_n = \frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right]^{(n+2)}_{z=0} + \left[\frac{1}{z^{n+3}(z+2)}\right]_{z=1} + \left[\frac{1}{z^{n+3}(z-1)}\right]_{z=-2}$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2}\right]^{(n+2)}_{z=0} + \left[\frac{1}{z^{n+3}(z+2)}\right]_{z=1} + \left[\frac{1}{z^{n+3}(z-1)}\right]_{z=-2}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{(-2)^{n+3}(-3)}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+3}} - \frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n+3}} = 0$$

$$\Rightarrow c_n = 0 \;\; ; \;\; n \geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z| > 2$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1-(-2)^{n-3}}{3}\right)\frac{1}{z^n} \;\; ; \;\; |z| > 2$$

١٢ . انشر الدالة:

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

في كل من المناطق الآتية:

$$|z|>2 \quad , \quad 2<|z-2|<3 \quad , \quad |z|<1$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{(z-2)(z+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}$$

عندما $|z|<1$:

فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}z^{n} \;\; ; \;\; |z|<1$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \;;\; n>0 \;\;\&\;\; c_{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \;;\; n\geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $|z|<1$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $r<1$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{z^{n-1}}{(z-2)(z+1)}dz=0 \Rightarrow c_{-n}=0 \;;\; n>0$$

(كون التابع تحليلي داخل المنطقة المحدودة بالمنحني c الذي نكامل عليه).

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\frac{1}{(z-2)(z+1)}}{z^{n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}\right]dz$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}\right]_{z=0}^{(n)} = \frac{1}{n!}\left[\frac{(-1)^n.n!}{3\cdot(z-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.n!}{3\cdot(z+1)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2^{n+1}} - (-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2^{n+1}} - (-1)^n\right) \ ; \ n \geq 0$$

ومن ثمَّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $|z| < 1$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2^{n+1}} - (-1)^n\right)z^n \ ; \ |z| < 1$$

عندما $2 < |z| < \infty$:

فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \ ; \ 2 < |z| < \infty$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz \ ; n > 0 \ \ \& \ \ c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \ ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة$\infty > |z| > 2$ التي مركزها مساوٍ لـ 0 ونصف قطرها $2 < r < \infty$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{-n+1}}\cdot\frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^{n-1}}{(z-2)(z+1)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{\frac{z^{n-1}}{z+1}}{z-2}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-1}}\frac{\frac{z^{n-1}}{z-1}}{z+1}dz$$

ومن ثمَّ باستخدام صيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين السابقين عندئذ:

$$\Rightarrow c_{-n}=\frac{2^{n-1}}{3}-\frac{(-1)^{n-1}}{3}\ \ ;\ n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z^{n+1}}\cdot\frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$$

فنلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته في النقاط -1 ,2 ,0 ومنه لتكن c_0 دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها صغير جداً ولتكن c_2 دائرة مركزها اثنان ونصف قطرها صغير جداً، ولتكن c_{-1} دائرة مركزها -1 ونصف قطرها صغير جداً ومنه:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{\frac{1}{(z-2)(z+1)}}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{\frac{1}{z^{n+1}(z+1)}}{z-2}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{-1}}\frac{\frac{1}{z^{n+1}(z-1)}}{z+1}dz$$

ومن ثمَّ وباستخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية للتكامل الأول وصيغة كوشي التكاملية الأولى للتكاملين الثاني والثالث نجد أن:

$$c_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(z-2)(z+1)}\right]^{(n)}_{z=0}+\left[\frac{1}{z^{n+1}(z+1)}\right]_{z=2}+\left[\frac{1}{z^{n+1}(z-2)}\right]_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}\right]^{(n)}_{z=0}+\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{3\cdot(-1)^{n+1}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{3\cdot(-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{3\cdot(1)^{n+1}}+\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{3\cdot(-1)^{n+1}}=0$$

$$\Rightarrow c_n = 0 \;\; ; \;\; n \geq 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{3} - \frac{(-1)^{n-1}}{3}\right)\cdot\frac{1}{z^n} \;\; ; 2 < |z| < \infty$$

عندما $2 < |z-2| < 3$:

فحسب مبرهنة لوران يمكن نشر التابع المعطى بمتسلسلة لوران من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n \;\; ; \;\; 2 < |z-2| < 3$$

وكما نعلم أن c_n, c_{-n} معاملات المتسلسلتين السابقتين يمكن إيجادهما وفق العلاقات التالية:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}dz \; ; n > 0 \;\; \& \;\; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz \; ; n \geq 0$$

حيث C هو عبارة عن منحني الدائرة الواقعة داخل الحلقة $2 < |z-2| < 3$ التي مركزها مساوٍ لـ 2 ونصف قطرها $2 < r < 3$ ومنه لنوجد الآن المعاملات كما يلي:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{-n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{(z-2)^{2-n}(z+1)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(z-2)^{n-2}}{z+1}dz$$

$$= \begin{cases} n = 1 \Rightarrow c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{dz}{(z-2)(z+1)} \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{\frac{1}{z+1}}{(z-2)} = \dfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow c_{-1} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] n > 1 \Rightarrow c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{(z-2)^{n-2}}{z+1}dz = 0 \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{(z-2)^{n+2}(z+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(z+1)^{n+2}}\right)_{z=2} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}} \quad ; n \geq 0$$

ومن ثمّ تكون متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في الحلقة $2 < |z-2| < 3$ هي:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{3^{n+2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2}$$

١٣) صنف الأصفار والنقاط الشاذة للدالة:

$$f(z) = \sin(1 - z^{-1})$$

الحل:

حيث إن أصفار $\sin w$ تظهر فقط عندما w تساوي $n\pi$، فإن الدالة $\sin(1 - z^{-1})$ لها أصفار عندما $1 - z^{-1} = n\pi$ وهذا يعني عند:

$$z = \frac{1}{1-n\pi} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

هذه الأصفار بسيطة لأن المشتقة عند هذه النقاط تكون:

$$\left.\frac{d}{dz}\sin(1-z^{-1})\right|_{z=(1-n\pi)^{-1}} = \left.\frac{1}{z^2}\cos(1-z^{-1})\right|_{z=(1-n\pi)^{-1}}$$

$$= (1 - n\pi)^2 \cos n\pi \neq 0$$

تظهر النقطة الشاذة الوحيدة للدالة $\sin(1 - z^{-1})$ عند $z = 0$. إذا فرضنا أن $z \to 0$ خلال قيم موجبة فإن $\sin(1 - z^{-1})$ تتذبذب ما بين ± 1. يميز مثل هذا السلوك النقطة الشاذة الأساسية فقط.

١٤) صنف جميع الدوال التي تكون تحليلية في كل مكان من المستوي المركب الممدد ما عدا قطب عند نقطة واحدة.

الحل:

إذا كان للدالة f قطب من الرتبة m عند نقطة محدودة z_0 فإن متسلسلة لوران للدالة f تكون على الشكل:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (1)$$

وتكون متقاربة لجميع $z \neq z_0$. كذلك، من هذا حيث قد فرضنا أن $z_0 \neq \infty$ فإن الدالة f يجب أن تكون تحليلية، ومنه تكون محدودة عند ∞ وعليه من المعادلة (1) نرى أن الدالة الكلية تعرف بمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ أيضاً تكون محدودة عند ∞، وعليه يجب أن تكون ثابتة وتساوي a_0. ومن ثمَّ الشكل الأكثر عموماً لمثل تلك الدالة هو:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 \quad (2)$$

إذا ظهر قطب واحد عند $z = \infty$ فإن $f\left(\frac{1}{w}\right)$ يكون لها قطب عند الصفر وبالإمكان التعبير عنها على الشكل:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_{-m}}{w^m} + \frac{a_{-m+1}}{w^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad (3)$$

حيث إن $f(z)$ محدودة بالقرب من $z = 0$ فإنه ينتج أن $f\left(\frac{1}{w}\right)$ محدودة لقيم $|w|$ الكبيرة. وكما هو في السابق نستنتج أن $a_n = 0$ لقيم $n > 0$. ومنه تصبح معادلة (3) على الشكل:

$$f(z) = a_{-m}z^{m} + a_{-m+1}z^{m-1} + \ldots + a_{-1}z + a_0 \qquad (4)$$

هذا يعني أن $f(z)$ كثيرة حدود في z.

تصنف المعادلتان (2)، (4) جميع الدوال التي لها قطب واحد في المستوى المركب الممدد.

١٥) حدد نوع النقطة $z = 0$ بالنسبة لكل من التابعين f التاليين:

١) $\dfrac{(e^{z}-1)}{1-\cos z}$ ٢) $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$

كيف تجعل هذه النقطة عادية؟.

الحل:

١) إن $z = 0$ نقطة شاذة معزولة وهي قابلة للإصلاح لأن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{(e^{z}-1)^{2}}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{2e^{z}(e^{z}-1)}{\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{4e^{2z}-2e^{z}}{\cos z} = 2 \neq 0$$

وبوضع $f(0) = \lim\limits_{z\to 0} f(z) = 2$ وأخذ التابع:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(e^{z}-1)^{2}}{1-\cos z} & ; \ z \neq 0 \\ 2 & ; \ z = 0 \end{cases}$$

تصبح النقطة $z = 0$ عادية.

لاحظ أنه يمكن أيضاً الحصول على المساواة $f(0) = 2$ من خلال الصيغ التقريبية:

$$1-\cos z \underset{z\to 0}{\approx} \frac{z^{2}}{2} \ , \ (e^{z}-1)^{2} \underset{z\to 0}{\approx} z^{2} \Rightarrow f \underset{z\to 0}{\approx} \frac{z^{2}}{z^{2}/2} = 2$$

٢) النقطة $z = 0$ شاذة من نوع قابلة للإصلاح لأن:

$$\lim_{z\to 0}\left(\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{z.\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-z\sin z-\cos z}{\sin z+z\cos z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z-\sin z-z\cos z-\cos z}{\cos z+\cos z-z\sin z}=\frac{-1}{2}\neq 0$$

أو لأن:

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\ldots}{z-\frac{z^3}{3!}+\ldots}=\frac{1}{z}+g(z)$$

ومن ثمّ $f(z)=\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}=g(z)$ تابع نظامي في النقطة $z=0$.

ما نوع النقطة $z=0$ بالنسبة لكل من $\operatorname{ctg} z$ و $1/z$ وماذا تستنتج؟

١٦) أوجد النقاط الشاذة في المستوى $\overline{C}$ لكل من التوابع f التالية وعيِّن نوع كل نقطة.

١) $\dfrac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z}}$ ٢) $\dfrac{1-\cos z}{(e^z-1)^3}$ ٣) $P_n(z)$ ٤) $\dfrac{1}{e^{1/z^2}+1}$

الحل:

١) النقاط الشاذة المعزولة لهذا التابع في المستوى C هي جذور المعادلة $\operatorname{sh}\frac{1}{z}=0$ أو $-i\sin\frac{i}{z}=0$ أي $z_k=\frac{1}{\pi k}i\ ;\ k=\pm1,\ \ldots$ وبما أن z_k أصفار بسيطة للتابع $g=\operatorname{sh}\frac{1}{z}$ فإنها أقطاب بسيطة للتابع $f=\frac{1}{g}$.

وبما أن $\lim_{k\to\infty} z_k=0$ فإن $z=0$ نقطة شاذة غير معزولة للتابع المعطى f بالنسبة للنقطة $z=\infty$ لدينا:

$$\operatorname{sh}\frac{1}{z}=-i\sin\frac{i}{z}\underset{z\to\infty}{\approx}\frac{1}{z}\Rightarrow f=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z}}\underset{z\to\infty}{\approx}z$$

وهذا يعني أن النقطة $z=\infty$ هي قطب بسيط للتابع f.

٢) النقطة $z = 0$ قطب بسيط لأن كل من البسط $P(z) = 1 - \cos z$ والمقام $q(z) = (e^z - 1)^3$ تابع نظامي في جوار الصفر وعندما $z \to 0$ يكون:

$$1-\cos z\underset{z\to 0}{\approx}\frac{z^2}{2}\ ,\ \left(e^z-1\right)^3\underset{z\to 0}{\approx}z^3\Rightarrow f=\frac{P(z)}{q(z)}\underset{z\to 0}{\approx}\frac{1}{2z}$$

هل يمكنك الحصول على هذه النتيجة باستخدام قاعدة أوبيتال؟.

جذور المقام $q(z)$ أي $z_k = 2\pi ki\ ;\ k = \pm1, \pm2,\dots$ أصفار من المرتبة الثالثة لـ q و z_k لا تعدم البسط $P(z)$. بالتالي فإن z_k هي أقطاب من المرتبة الثالثة للتابع f.

النقطة $z=\infty$ شاذة غير معزولة لأنها نقطة تراكم لمجموعة الأقطاب $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = \infty$.

٣) متسلسلة لوران حول $z=\infty$ لكثيرة الحدود $f(z) = P_n(z)$ هي نفسها متسلسلة ماك لوران لكن قسمها الرئيسي هو أسس z الموجبة، أي $a_1z + \dots + a_nz^n$ وبما أن عدد حدود هذا القسم منتهٍ وأكبر أسسه الموجبة هو n $(a_n \neq 0)$ فإن $z = \infty$ هي قطب من المرتبة n لكثيرة الحدود $P_n(z)$.

ونصل إلى هذه النتيجة مباشرة من الصيغة التقريبية الآتية:

$$P_n(z)\underset{z\to\infty}{\approx}z^n$$

٤) النقطة $z=0$ شاذة غير معزولة لأنها نقطة تراكم للأقطاب البسيطة:

$$z_k=\pm\frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi i}},$$

ما هي نوع النقطة $z=\infty$ بالنسبة للتابع المفروض؟.

١٧) بيِّن أنه يمكن إعادة تعريف الدالة f لتكون تحليلية عند $z = 0$ ومن ثمَّ تكون كلية حيث إن:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

الحل:

لنجد متسلسلة لوران للدالة $\dfrac{\sin z}{z}$ حول $z_0 = 0$ وهي:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left\{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots\right\}$$
$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\dots$$

نلاحظ أن $z_0 = 0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة وذلك لأن $\alpha_n = 0$ لكل $n = -1, -2, \dots$ حيث يظهر فقط متسلسلة تايلور عند $z_0 = 0$ ومن ثمَّ فإن الدالة تحليلية عند $z_0 = 0$ وباقي الأعداد المركبة فهي من ثمَّ كلية عندما نعيد تعريف الدالة عند $z_0 = 0$ وذلك بجعل:

$$f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}\left\{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\dots\right\}=1$$

ومن ثمَّ فإن الدالة تعرف بما يلي:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & ,z\neq 0\\ 1 & ,z=0\end{cases}$$

لتكون كلية.

١٨) حدد مرتبة القطب $z = 0$ بالنسبة للتابع:

$$f(z) = \frac{1}{\left(2\cos z + z^2 - 2\right)^2}$$

الحل:

لنفرض أن:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\left(2\cos z + z^2 - 2\right)^2}} = \left(2\cos z + z^2 - 2\right)^2$$

ونعلم أنه إذا كانت النقطة $z = 0$ صفراً من المرتبة k للدالة $g(z)$ فإن النقطة $z = 0$ تكون قطباً من المرتبة k للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)}$$

لنضع: $h(z) = 2\cos z + z^2 - 2$

ومن ثمَّ يكون لدينا: $g(z) = [h(z)]^2$

وبحسب مبرهنة سابقة نعلم أنه إذا كانت للدالة $h(z)$ صفراً من المرتبة m فإن الدالة $g(z) = [h(z)]^2$ صفراً من المرتبة $2m$.

لنوجد الآن مرتبة الصفر للدالة $h(z)$ التي هي عبارة عن مرتبة أول مشتق غير معدوم عند $z = 0$. لنحسب الآن المشتقات المتتالية:

$$h'(z) = -2\sin z + 2z \Rightarrow [h'(z)]_{z=0} = 0$$
$$h''(z) = -2\cos z + 2 \Rightarrow [h''(z)]_{z=0} = 0$$
$$h^{(3)}(z) = 2\sin z \Rightarrow [h^{(3)}(z)]_{z=0} = 0$$
$$h^{(4)}(z) = 2\cos z \Rightarrow [h^{(4)}(z)]_{z=0} = 2 \neq 0$$

ومن ثمَّ فإن مرتبة الصفر $z = 0$ للدالة $h(z)$ هو من المرتبة الرابعة، وهذا يؤدي أن مرتبة الصفر $z = 0$ بالنسبة للدالة $g(z)$. بحسب مبرهنة سابقة هو $2 . 4 = 8$، أي إن $z = 0$ هي قطب من المرتبة الثامنة للتابع $f(z)$ المعطى.

١ . ٢٧ . تمارين غير محلولة:

١ . أوجد متسلسلة لوران التي تمثل الدالة:

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+i)}$$

في المناطق التالية:

أ . $|z| < 1$ ب . $|z+i| < 1$

ج . $|z+1| < 1$ د . $|z+i| > 1$

٢ . أوجد متسلسلة لوران التي تمثل الدالة:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}$$

في المناطق التالية:

أ . $|z-1| < 1$ ب . $|z-i| < 1$

ج . $|z-i| > 1$ د . $|z| > 1$

٣ . أوجد متسلسلة لوران التي تمثل الدالة:

$$f(z)=\frac{\cos iz}{z^4}$$

في المناطق التالية:

أ . $0 < |z| < 1$ ب . $|z| > 0$

ج . $|z-i| < 1$ د . $|z-i| > 2$

٤ . أوجد متسلسلة لوران بدلالة قوى z التي تمثل الدالة:

$$f(z)=\frac{e^z}{z(z+1)}$$

في منطقتين مختلفتين واذكرهما.

٥ . مثّل الدالة $f(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$ بما يلي:

أ . متسلسلة ماكلورين ثم أوجد مجال التقارب لها.

ب . متسلسلة لوران في المنطقة $1 < |z|$.

٦ . أوجد متسلسلة لوران التي تمثل الدالة:

$$f(z)=z^4\sin\left(\frac{1}{2z}\right)$$

في المنطقة $0 < |z|$.

٧ . بيّن أن متسلسلة لوران التي تمثل الدالة: $f(z)=e^{-1/z^2}$

هي $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!z^{-2n}}$ في المنطقة $0 < |z|$.

ثم أجب عما يلي:

أ . هل يوجد متسلسلة ماكلورين بقوى المتغير الحقيقي x تمثل الدالة الحقيقية: $x \neq 0$, $g(x) = e^{-1/x^2}$.

ب . بيّن أن $g^{(n)}(0) = 0$ لكل $n = 1, 2, 3, \ldots$.

ج . بيّن أن الدالة $f(z)$ ليست مستمرة عند $z = 0$.

د . هل يوجد متسلسلة ماكلورين تمثل الدالة f بقوى z. لماذا؟

٨ . بيّن أن متسلسلة لوران التي تمثل الدالة:

$$f(z)=e^{\frac{1}{2}t(z-\frac{1}{2})}$$

هي $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(t)z^n$ في المنطقة $0 < |z|$.

وبفرض أن مسار التكامل هو الكانتور $C: |z| > 0$.

بين أن: $J_n(t) = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - t\sin\theta)d\theta$

ثم بيّن أن: $J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t)$

تسمى هذه المعاملات $J_n(t)$ دالة بيسيل (Bessel).

٩ . بيِّن أن متسلسلة لوران التي تمثل الدالة:

$$f(z) = \cosh\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

هي: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n z^n$ حيث إن:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\cosh(2\cos t)dt$$

وذلك بفرض أن مسار التكامل هو الكانتور C: $|z| = 1$.

١٠ . أوجد متسلسلة لوران للدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z-t} \quad , \ |t| < 1$$

في المنطقة $|z| > |t|$ (حيث t مقدار ثابت) وبفرض أن $z = e^{\theta i}$ فبين أن:

أ . $$\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\theta = \frac{t\cos\theta - t^2}{1-2t\cos\theta + t^2}$$

ب . $$\sum_{n=1}^{\infty}t^n\sin n\theta = \frac{t\sin\theta}{1-2t\cos\theta + t^2}$$

١١ . هل يمكن إيجاد صيغة عامة لمتسلسلة لوران للدالة:

$$f_k(z) = \frac{1}{(z-t)^k} \quad , \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

في المنطقة $|z| > |t|$.

(اقتراح: استعن بالتمرين ١٠).

١٢ . صنف النقاط الشاذة لكل من الدوال التالية:

أ . $f(z)=\frac{1}{z^4}e^{z^2}$ ب . $f(z)=\frac{\cos z}{1+z^2}$

ج . $f(z)=\frac{\sin 2z}{z^3}$ د . $f(z)=\tan 2z$

هـ . $f(z)=\cot\left(\frac{i}{z}\right)$ و . $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$

ز . $f(z)=z^4\sec\left(\frac{1}{z}\right)$

١٣ . برهن أنه يوجد صفر من الدرجة m للدالة التحليلية f إذا وإذا فقط يوجد قطب من الدرجة m للدالة $g=\frac{1}{f}$.

١٤ . لأي دالتين تحليليتين f و g بحيث إن z_0 صفر من الدرجة m للدالة f وهي صفر من الدرجة n للدالة g فإن:

أ . z_0 تمثل نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $h = f/g$ وهي صفر من الدرجة $m - n$ إذا كانت $m > n$.

ب . z_0 تمثل قطباً من الدرجة $n - m$ للدالة $h = f/g$ إذا كانت $m < n$.

ج . z_0 تمثل نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $h = f/g$ ويمكن إعادة تعريف h لتكون $h(z_0) \neq 0$ إذا كانت $m = n$.

١٥ . برهن أنه إذا كانت z_0 تمثل قطباً من الدرجة m للدالة f فإنها تمثل قطباً من الدرجة $m + 1$ للدالة f'.

١٦ . برهن أو انفِ بمثال عددي الجمل التالية:

أ . إذا كانت z_0 قطباً للدالتين f و g فإنها تكون قطباً للدالة $f + g$.

ب . إذا كانت z_0 نقطة شاذة لازمة لكل من الدالتين f و g فإنها تكون نقطة شاذة لازمة للدالة $f + g$.

١٧ . أعد تعريف الدوال التالية لتكون تحليلية عند النقاط الشاذة لها:

أ . $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$

ب . $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$

ج . $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^2}$

١٨ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $f(z) = \dfrac{1}{z + z^2}$ في كل من المناطق التالية:

أ . $0 < |z| < 1$ ب . $1 < |z|$

ج . $0 < |z + 1| < 1$ د . $1 < |z + 1|$

١٩ . هل الفرع الرئيسي للدالة $\sqrt{z}$ له متسلسلة لوران في المنطقة $C\backslash\{0\}$؟

٢٠ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $\dfrac{z}{(z+1)(z-1)}$ في كل من المناطق التالية:

أ . $|z| < 1$ ب . $1 < |z| < 2$ ج . $2 < |z|$

٢١ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $\dfrac{\sin 2z}{z^3}$ في $|z| > 0$.

٢٢ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $\dfrac{(z+1)}{z(z-4)^3}$ في $0 < |z - 4| < 4$.

٢٣ . أوجد متسلسلة لوران للدالة $z^2 \cos\left(\dfrac{1}{3z}\right)$ في $|z| > 0$.

٢٤ . احصل على الحدود القليلة الأولى من متسلسلة لوران لكل من الدوال التالية في المناطق المعطاة الآتية:

أ . $|z| > 1$, $\dfrac{e^{1/z}}{z^2-1}$ ب . $0 < |z| < 2\pi$، $\dfrac{1}{e^z-1}$

ج . $0 < |z| < \pi$، $\csc z$ د . $1 < |z|$، $1/e^{(1-z)}$

٢٥ . حدد الحلقة التي تكون فيها متسلسلة لوران $\sum_{j=-0}^{\infty}\dfrac{z^j}{2^{|j|}}$ متقاربة.

٢٦ . أثبت أن متسلسلة لوران للدالة $f(z)=\exp\left[\dfrac{\lambda}{2}(z-\dfrac{1}{z})\right]$ في $|z| > 0$ تكون معطاة كالآتي:

$$\sum_{k=-0}^{\infty}J_k(\lambda)z^k$$

حيث:

$$J_k(\lambda)=(-1)^k J_{-k}(\lambda):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(k\theta-\lambda\sin\theta)d\theta$$

تعرف $J_k(\lambda)$ بأنها دوال بيسل من النوع الأول.

٢٧ . احصل على صيغة عامة لمتسلسلة لوران للدالة:

$$f_n(z)=\frac{1}{(z-a)^n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

التي تكون صحيحة لقيم $|z| > |\alpha|$.

٢٨ . أثبت أنه إذا كان للدالة f(z) متسلسلة لوران على الصورة $\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^j$ في $0 < |z| < \rho$، فإن $\lim_{z\to 0} f(z)$ يكون موجوداً.

٢٩ . صنف السلوك عند ∞ لكل من الدوال التالية (فيما إذا كانت صفراً أو قطباً، واذكر رتبتها):

أ . e^z ب . $\cosh z$ ج . $\dfrac{z-1}{z+1}$

د . $\dfrac{z}{z^3+i}$ هـ . $\dfrac{z^3+i}{z}$ و . $e^{\sinh z}$

ز . $\dfrac{\sin z}{z^2}$ ح . $\dfrac{1}{\sin z}$ ط . $e^{\tan 1/z}$

٣٠ . أثبت أنه إذا كانت $f(z)$ تحليلية عند ∞ فإنه يكون لها متسلسلة من الشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

وتكون متقاربة بانتظام خارج قرص ما.

٣١ . أعط متسلسلة كما في المسألة (٣٠) للدوال التالية:

أ . $\dfrac{z-1}{z+1}$ ب . $\dfrac{z^2}{z^2+1}$ ج . $\dfrac{1}{z^3-i}$

٣٢ ـ ما مرتبة (درجة) الصفر عند ∞ إذا كانت $f(z)$ دالة كسرية من الشكل $P(z)/Q(z)$ بحيث تكون درجة $Q >$ درجة P.

٣٣ . لنفرض أن f تحليلية على وخارج مسار بسيط مغلق سالب الاتجاه Γ. كذلك افرض أن f تحليلية عند ∞ و $f(\infty) = 0$. أثبت أن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

لجميع z خارج Γ.

[إرشاد: طبق صيغة كوشي للتكامل لقيم z في حلقة، اجعل نصف القطر الخارجي يؤول إلى ∞].

٣٤ . أثبت أنه إذا كانت f تحليلية على وخارج مسار بسيط مغلق Γ ولها صفر من المرتبة ٢ أو أكثر عند ∞ فإن:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

هل هذا التكامل يتلاشى إذا فرضنا أن f لها صفر بسيط عند ∞.

٣٥ . لنفرض أن النقطة $z = x + iy$ تقابل النقطة (x_1, x_2, x_3) على الكرة:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

تحت الإسقاط الاستريوغرافي stereographic. أثبت أن:

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} \ , \ x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} \ , \ x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

[إرشاد: يجب أن تكون النقاط الثلاث $(0, 0, 1)$، (x_1, x_2, x_3)، $(x, y, 0)$ على استقامة واحدة.

٣٦ . أثبت أن الصورة تحت الإسقاط الاستيريوغرافي stereographic لدائرة أو لخط مستقيم في المستوى z هي دائرة على الكرة $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

[إرشاد: بين أن الصورة هي تقاطع الكرة مع المستوي $Ax_1 + bx_2 + Cx_3 = D$].

٣٧ . أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة لكل من الدوال التالية:

أ . $\dfrac{z^3+1}{z^2(z+1)}$ ب . $z^3 e^{1/z}$ ج . $\dfrac{\cos z}{z^2+1} + 4z$ د . $\dfrac{1}{e^z - 1}$

هـ . $\tan z$ و . $\cos(1 - \dfrac{1}{z})$ ز . $\dfrac{\sin(3z)}{z^2} - \dfrac{3}{z}$ ح . $\cot(\dfrac{1}{z})$

٣٨ . شكل تابع فيه $z_1 = -1$ قابلة للإصلاح و $z_2 = 0$ قطب من المرتبة الثانية و $z_3=1$ شاذة أساسية ثم أوجد متسلسلة لوران له في الحلقة $0 < |z| < 1$.

٣٩ . لكل من التالي، كون دالة f تحليلية في المستوى ما عدا عند النقاط الشاذة المعزولة التي تحقق الشروط المعطاة:

أ . لها صفر من المرتبة ٢ عند $z = i$ وقطب من المرتبة ٥ عند $z = 2 - 3i$.

ب . f لها صفر بسيط عند $z = 0$ ونقطة شاذة أساسية عند $z = 1$.

ج . f لها نقطة شاذة قابلة للإزالة (للفصل) عند $z=0$، وقطب من المرتبة ٦ عند $z = 1$ ونقطة شاذة أساسية عند $z = i$.

د . f لها قطب من المرتبة ٢ عند $z = 1+i$، ونقطة شاذة أساسية عند $z = 0$ و $z =1$.

٤٠ ـ لكل من التالي: حدد ما إذا كانت العبارة صحيحة دائماً، أم أحياناً، أم غير صحيحة:

أ . إذا كان لكل من f, g قطب عند z_0 فإن $f + g$ لها قطب عند z_0.

ب . إذا كان للدالة f نقطة شاذة أساسية عند z_0، g لها قطب عند z_0، فإن $f + g$ لها نقطة شاذة أساسية عند z_0.

ج . إذا كان للدالة f قطب من الرتبة m عند $z = 0$، فإن $f(z^2)$ لها قطب من المرتبة $2m$ عند $z = 0$.

د . إذا كان للدالة f قطب عند z_0 و g لها نقطة شاذة أساسية عند z_0، فإن حاصل الضرب $f . g$ له قطب عند z_0.

هـ . إذا كان للدالة f صفر من المرتبة m عند z_0 و g لها قطب من المرتبة n وكان $m \geq n$ عند z_0، فإن حاصل الضرب $f . g$ له نقطة شاذة قابلة للعزل (الفصل) عند z_0.

٤١ . أثبت أنه إذا كان للدالة $f(z)$ قطب من المرتبة m عند z_0 فإن $f'(z)$ يكون لها قطب من المرتبة $m + 1$ عند z_0.

٤٢ . إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في $D: 0 < |z| \le 1$ و $f(z)$. z^l غير محدودة في D لكل عدد طبيعي l، فما نوع النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ عند $z = 0$.

٤٣ . هل توجد دالة $f(z)$ لها نقطة شاذة أساسية عند z_0 وتكون محدودة على خط مستقيم يمر بالنقطة z_0؟

٤٤ . إذا كانت $f(z)$ تحليلية على مجال D ولها أصفار عند النقاط المختلفة $z_1, z_2,..,z_n$ ذات الرتب $m_1, m_2,\ldots,m_n$، على الترتيب، فأثبت أنه توجد دالة $g(z)$ تحليلية على D بحيث إن:

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2}\ldots(z - z_n)^{m_n}\,g(z)$$

٤٥ . إذا كان للدالة f قطب عند z_0 فبين أن $\mathrm{Re}f$ و $\mathrm{Im}f$ تأخذان قيماً موجبة كبيرة اختيارية، كما تأخذان قيماً سالبة كبيرة اختيارية في أي جوار مثقوب للنقطة z_0.

٤٦ . أثبت أنه إذا كان للدالة $f(z)$ قطب من المرتبة m عند z_0، فإن:

$$g(z) = f'(z) / f(z)$$

يكون لها قطب بسيط عند z_0. ما معامل $(z - z_0)^{-1}$ في مفكوك لوران للدالة $g(z)$؟

٤٧ . ليكن للدالة $f(z)$ نقطة شاذة معزولة عند z_0 ولنفرض أن $f(z)$ محدودة في جوار ما مثقوب للنقطة z_0. أثبت مباشرة من صيغة التكامل لمعاملات لوران أن $a_{-j} = 0$ لجميع $j = 1, 2, \ldots$. هذا يعني أنه يجب أن يكون للدالة $f(z)$ نقطة شاذة قابلة للعزل (للفصل) عند z_0.

٤٨ . أثبت أنه إذا كان للدالة $f(z)$ نقطة شاذة أساسية عند z_0، فإنه أيضاً يكون للدالة $e^{f(z)}$ نفس الشيء. [إرشاد: أثبت أن $e^{f(z)}$ ليست محدودة ولا هي تقترب (بالمقياس) من اللانهاية عندما $z \to z_0$].

٤٩ . ارسم المنحنيات $|e^{\frac{1}{z}}|=s$ لقيم $s=1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3...$ ولاحظ أنها تقترب من النقطة الشاذة الأساسية $z=0$ للدالة $e^{\frac{1}{z}}$ [إرشاد: لاحظ أن المنحنيات دوائر].

٥٠ . أوجد متسلسلة لوران للتابع:

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$$

في المناطق التالية:

(١) $|z|<1$.

(٢) $1<|z|<2$.

(٣) $|z|>2$.

٥١ . أوجد متسلسلة لوران للتابع:

$$f(z)=\frac{5z+2i}{z(z+i)}$$

في المنطقة $1<|z-i|<2$.

٥٢ . انشر الدالة $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ في كل من المناطق الآتية:

$|z|<1$، $2<|z-2|<3$، $|z|>2$.

٥٣ . عين أقطاب الدوال الآتية، وعين مراتبها:

$$\frac{e^z-1}{z^3},\ \frac{1}{z^2+4},\ \frac{\sin z}{z^2-5z+6},\ \frac{\cos z}{z^2+2z+1},\ \frac{e^z}{(z-1)^2},$$

$$\frac{z^2+1}{z^2+3z+2},\ \frac{1}{z^2}\sin 2z,\ \frac{z}{z^2+4},\ \frac{1}{z^3(z-2)},\ \frac{z+1}{(z-1)\sin z},$$

$$\frac{z^2-z+1}{(z^2+1)(z^2+4)} \;,\; \frac{z+1}{(z-1)^3(z^2)} \;,\; \frac{z}{z^2+4z-5}$$

٥٤ . بين نوع النقاط الشاذة لكل من الدوال الآتية بعد إيجادها:

$$\frac{1}{(z^2+i)^2} \;,\; \frac{1}{\sin z} \;,\; \frac{z}{(z+1)^3(e^z-1)} \;,\; \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z} , \frac{1}{e^{z-3i}} \;,\; \frac{e^{iz}-\sin z}{(z-\pi)^3}$$

٥٥ . بين نوع اللانهاية لكل من الدوال الآتية:

$$e^{-2z}+3z^3-z+8 \;,\; \cos z \;,\; e^{-z} ,\; \frac{z}{1-3z^4} \;,\; z^2/z^2-z-4 \;,$$
$$3z^5-5z+2/\,z^2+z-4$$

٥٦ . مستفيداً من نشر لوران للدالة $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$، بين طبيعة النقطة الشاذة $z=1$ في المنطقة $|z-1|>0$.

٥٧ . أوجد متسلسلة لوران للتابع $f(z)=\dfrac{2\cos z+z^2-2}{z^6}$ حول النقطة $z=0$ ثم بين طبيعة هذه النقطة.

٥٨ . أعد السؤال السابق من أجل الدوال الآتية:

$$\frac{e^{2z}-1}{z} \;,\; z^2e^{\frac{1}{z}} \;,\; \frac{1}{z}\mathrm{ch}\frac{1}{z} \;,\; \frac{1-\cos 2z}{z} \;,\; \frac{z^3-1}{z^2(2z+1)} \;,\; \frac{1+\cos \pi z}{z^2} \;,$$
$$\frac{\ln(1+z)}{z}$$

٥٩ . بين نوع النقطة الشاذة في اللانهاية للدالتين:

1) $\dfrac{z^4}{z-1}$; في المنطقة $|z|>2$

2) $z\sin\dfrac{1}{z}$; في المنطقة $|z|>1$

٦٠ . ما نوع النقطة $z_0 = 0$ بالنسبة للدالة: $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.

٦١ . أوجد متسلسلة لوران لكل من الدوال الآتية:

أ . $\dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}$ وحيث D حلقة مركزها الصفر وبحيث تقع في $\pm 2i$ خارجها.

ب . $\dfrac{z+1}{z(z-4)^3}$ وحيث $0 < |z-4| < 4$.

ج . $\dfrac{1}{z+1}$ وحيث $1 < |z| < \infty$.

د . $\dfrac{e^{iz}}{iz^5}$ وحيث $|z| > 0$.

٦٢ . انشر كلاً من الدوال الآتية في متسلسلة لوران حول النقطة المبينة جانبها وحدد القسم الرئيسي:

أ . $\dfrac{1}{z(1-z)} \quad ; \quad z = 1$

ب . $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} \quad ; \quad z = \infty$

ج . $\operatorname{sh}\dfrac{z}{1-z} \quad ; z = 1$

د . $\ln\dfrac{z-2}{z-5} \quad ; z = \infty$

٦٣ . حدد أمثال $\dfrac{1}{z}$ في متسلسلة لوران للتابع $\sin z \cdot \sin\dfrac{1}{z}$ حول $z = \infty$.

٦٤ . برهن على إمكانية فصل فروع وحيدة التعيين وتحليلية لكل من التوابع المتعددة التعيين في الساحات D المبينة بجانب كل تابع:

1) $\operatorname{Ln}(1-z^2)$; D: $\{z \notin (-\infty, -1]\ ,\ z \notin [1, +\infty)\}$

2) $\sqrt{1-z^2}\operatorname{Ln}z$; D: $\{z \notin (-\infty, -1]\ ,\ z \notin [0, +\infty)\}$

3) $\sqrt[3]{(z^2-1)(z^2-4)}$; D: $\{\operatorname{Im} z > 0\}$

4) $\operatorname{Ln}(z+\sqrt{1+z^2})$; D: $\{\operatorname{Re} z > 0\}$

5) $\operatorname{Ln}(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})$; D: $\{z \notin (-\infty,0]\ ,\ z \notin [1\ ,+\infty)\}$

٦٥ . لتكن الساحة D هي المستوي العقدي باستثناء القطعتين $[1, +\infty)$, $(-\infty , -1]$ وليكن $\varphi(z)$ الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\operatorname{Ln}(1-z^2)$ في الساحة D والمحقق للشرط $\varphi(0) = 0$ أوجد:

1) $\varphi(i)$, 2) $\varphi(-i)$, 3) $\varphi\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$, 4) $\varphi\left(\dfrac{-i}{\sqrt{2}}\right)$

٦٦ . لتكن D هي المستوي العقدي الموسع باستثناء القطع على طول المجال $[-1\ ,\ 1]$ وليكن $\varphi_1(z)$ هو الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}$ في الساحة D والمحقق للشرط $\varphi(+i0) = 1$ و $\varphi_2(z)$ الفرع الوحيد التعيين والتحليلي للتابع $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ في الساحة D والمحقق للشرط $\varphi(-i0) = 0$ أوجد القيم:

1) $\varphi_1(-i0)$, 2) $\varphi_2(-i)$, 3) $\varphi_3(+i0)$, 4) $\varphi_4(i)$

٦٧ . هل توجد فروع وحيدة التعيين وتحليلية للتوابع المتعددة التعيين في الساحة المبينة بجانب كل منها:

1) $\sqrt[3]{\dfrac{z+1}{z+i}}$, D: $\{1 < |z| < \infty\}$

2) $\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$, D: $\{\operatorname{Re} z > 0\ ,\ |z-3| > 2.5\}$

٦٨ . إن مجموع المتسلسلة $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ قابل للنشر في جوار للنقطة $z = \frac{1}{2}$. ما هي الساحة التي يمكن عليها تمديد التابع $f(z)$ تحليلياً؟

* * *

الفصل الثاني

نظرية الرواسب وتطبيقاتها

Residue Theory And Its Applications

٢ . ١ . تعريف راسب عقدي:

نسمي العدد العقدي التالي:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

براسب التابع التحليلي $f(z)$ في النقطة الشاذة المعزولة $z = a$ ونرمز له بإحدى الرموز الثلاثة الآتية:

$$R(a) = \mathrm{Res}[f(z), a] = \mathrm{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

ومن ثمّ نستنتج أن:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i . R(a)$$

حيث C منحني مغلق يقع في المنطقة:

$$0 < |z - a| < r_1 \quad ; r_1 \in R^+$$

وموجه باتجاه موجب ويحوي النقطة الشاذة a.

٢ . ٢ . طرائق حساب الرواسب:

١ . إذا كانت النقطة $z = a$ نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ فإن الراسب في هذه النقطة هو c_{-1} ويتعين من متسلسلة لوران في جوار النقطة $z = a$ وهو عبارة عن أمثال الحد $\frac{1}{z-a}$.

٢ . إذا كانت النقطة $z = a$ نقطة شاذة قابلة للحذف فإنه كما نعلم $c_{-n} = 0 \; ; \; n \geq 1$ ومن ثمَّ راسب الدالة $f(z)$ في النقطة $z = a$ يكون معدوماً أي $R(a) = 0$.

٣ . إذا كانت $z = a$ قطباً بسيطاً للدالة $f(z)$ فإن راسب التابع في النقطة $z = a$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$R(a) = \lim_{z \to a}(z - a)f(z)$$

٤ . إذا كانت $z = a$ قطباً من المرتبة k فإن:

$$R(a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - a)^k . f(z)\right]$$

٥ . إذا كان $f(z)$ يكتب بالشكل $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ وحيث إن $\psi'(a) \neq 0$ وكانت a قطباً بسيطاً للدالة $f(z)$ عندئذٍ راسب الدالة عند a يكون:

$$Res_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

٢ . ٣ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

أوجد راسب التابع $f(z) = \tan(z)$ عند النقاط الممكنة.

الحل:

إن $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = \tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$$

ومنه النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z_k = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right) \quad ; \; k \in z$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة وذلك لأن:

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k).f(z) = \lim_{z\to z_k}(z-z_k).\frac{\sin z}{\cos z} = \frac{0}{0}$$

وهي عبارة عن حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال فنجد أن:

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k).\frac{\sin z}{\cos z} = \lim_{z\to z_k}\frac{\sin z+(z-z_k).\cos z}{-\sin z}$$

$$= \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1 \neq 0$$

ومن ثم فإنه بحسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k] = \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1$$

ملاحظة:

عندما تحققنا من أن النقاط z_k هي عبارة عن أقطاب بسيطة وذلك عن طريق النهاية نكون في هذه الحالة قد طبقنا الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب ومن ثمَّ كلتا الطريقتين صحيحتان.

مثال (٢):

أوجد راسب الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

الحل:

إن النقاط الشاذة للدالة السابقة هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(1+z^2)^2 = 0 \Rightarrow 1+z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

وإن كلاً من النقطتين السابقتين هي عبارة عن أقطاب من المرتبة الثانية للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد:

$$R(i)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-i)^2.\frac{1}{(1+z^2)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2.\frac{1}{(z+i)^2.(z-i)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{-2}{(z+i)^3}\right]=\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{-i}{4}\Rightarrow R(i)=\frac{-i}{4}$$
$$R(-i)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+i)^2.\frac{1}{(1+z^2)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[(z+i)^2.\frac{1}{(z+i)^2.(z-i)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-i)^2}\right]$$
$$=\lim_{z\to -i}\left[\frac{-2}{(z-i)^3}\right]=\frac{-2}{(-2i)^3}=\frac{i}{4}\Rightarrow R(-i)=\frac{i}{4}$$

نتيجة:

إذا كانت $a=x+iy$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ وكانت $\bar{a}=x-iy$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ والنقطتان السابقتان هما عبارة عن قطب للتابع $f(z)$ فإن:

$$Res[f(z),\bar{a}]=\overline{Res[f(z),a]}$$

وهذه النتيجة تنسجم مع المثال السابق.

مثال (٣):

أوجد راسب الدالة:

$$f(z)=\frac{\sin^2 z}{\cos z}$$

وذلك في النقطة $z=\frac{\pi}{2}$.

الحل:

إن النقطة $z=\frac{\pi}{2}$ هي نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ وهي عبارة عن قطب بسيط:

ومن ثمّ نجد أن حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب أن:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\varphi(\frac{\pi}{2})}{\psi'(\frac{\pi}{2})}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}=-1$$

وذلك لكون $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi\,(z)}=\frac{\sin^2 z}{\cos z}\qquad .$$

مثال (٤):

أوجد راسب الدالة:

$$f(z)=\frac{z+1}{(z-1).\sin z}$$

وذلك في $z=0$.

الحل:

إن $z=0$ هي عبارة عن نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ وهي عبارة قطب بسيط (يمكن التحقق من ذلك) ومن ثمّ حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب نجد:

$$\operatorname{Res}_0 f(z)=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{\frac{0+1}{0-1}}{\cos(0)}=-1$$

وذلك لكون $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi\,(z)}=\frac{\frac{z+1}{z-1}}{\sin z}$$

مثال (٥):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2} dz \qquad ; \qquad C : |z| > 1$$

الحل:

وجدنا حسب تعريف راسب التابع $f(z)$ أن:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i . R(a)$$

ومن ثمّ $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ والنقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة معزولة للتابع المستكمل أي للتابع $f(z)$ والأكثر من ذلك النقطة $z = 0$ هي عبارة عن قطب بسيط ويكون الراسب حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب هو:

$$R(0) = \lim_{z\to 0} z . \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

ومن ثمّ نجد أن: $\int_C \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i . R(a) = 2\pi i$

مثال (٦):

لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

والمطلوب: أوجد الرواسب عند كل النقاط الممكنة.

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^3 - z^5 = 0 \Rightarrow z^3(1 - z^2) = 0 \Rightarrow z = 0 , z = 1 , z = -1$$

أما النقاط $z = \pm 1$ فهي عبارة عن أقطاب بسيطة ولكن النقطة $z = 0$ فهي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة ومن ثمَّ يكون:

$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1).\frac{1}{z^3.(1-z)(z+1)}$$

$$= \lim_{z\to 1}\ \frac{-1}{z^3.(z+1)} = \frac{-1}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-1] = \lim_{z\to -1}(z+1).\frac{1}{z^3.(1-z)(z+1)}$$

$$= \lim_{z\to -1}\ \frac{1}{z^3.(1-z)} = \frac{-1}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0] = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\ \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^3}{z^3.(1-z)(z+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\ \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(1+z).(1-z)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\ \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(1+z)} + \frac{\frac{1}{2}}{1-z}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{z\to 0}\ \frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1-z)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{z\to 0}\ \left[\frac{2}{(1+z)^3} + \frac{2}{(1-z)^3}\right] = \frac{1}{4}.[2+2] = 1$$

مثال (٧):

أوجد راسب الدالة $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^2}$ في النقطة $z = 0$.

الحل:

بالاستفادة من نشر الـ $\sin z$ نجد أن:

$$f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2} = \frac{1}{z^2}.\left(2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \frac{(2z)^7}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{z} - 2^3.\frac{z}{3!} + 2^5.\frac{z^3}{5!} - 2^7.\frac{z^5}{7!} + \cdots$$

ومن ثمَّ:

$$\text{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 2$$

مثال (٨):

أوجد راسب التابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ في النقطة $z = 0$.

الحل:

بما أن القسم الرئيسي يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود فإن $z = 0$ هي عبارة عن نقطة شاذة أساسية ومن ثمَّ:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2!.z^2} + \frac{1}{3!.z^3} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow R(0) = c_{-1} = 1$$

مثال (٩):

أوجد راسب الدالة:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

وذلك في النقاط الشاذة $z = \pm 1$.

الحل:

إن النقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة معزولة وهي عبارة عن قطب بسيط للدالة $f(z)$

إن النقطة $z = -1$ هي أيضاً نقطة شاذة معزولة للدالة، وهي أيضاً عبارة عن قطب بسيط ومن ثمَّ حسب الطريق الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد:

$$R(1) = \lim_{z\to 1}(z-1).\frac{z}{z^2-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

$$R(-1) = \lim_{z\to -1}(z+1).\frac{z}{z^2-1} = \lim_{z\to -1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{2}$$

مثال (١٠):

أوجد راسب الدالة $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-3)}$ وذلك في النقطة $z = 2$.

الحل:

إن $z = 2$ هي نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ وهي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية ومن ثمَّ:

$$R(2) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[(z-2)^2.\frac{1}{(z-2)^2.(z-3)}\right] = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3)}\right] =$$

$$\lim_{z\to 2}\left[\frac{-1}{(z-3)^2}\right] = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 \Rightarrow R(2) = -1$$

بطريقة أخرى: نفرض أن $z - 2 = t \Rightarrow z = t + 2$ ومن ثمَّ:

$$F(t) = f(t+2) = \frac{1}{t^2.(t-1)} = \frac{-1}{t^2}.\frac{1}{1-t}$$

$$= \frac{-1}{t^2}.(1 + t + t^2 + t^3 + \cdots)$$

$$= -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1 - t - \cdots$$

وبالعودة وتعويض كل $t = z - 2$ نجد:

$$f(z) = -\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)} - 1 - (z-2) - \cdots$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$R(2) = c_{-1} = -1$$

٢ . ٤ . حساب الراسب في اللانهاية:

إذا كان التابع $f(z)$ تابعاً تحليلياً في جوار اللانهاية فإنه يكون قابلاً للنشر في متسلسلة لوران في المنطقة $|z| > r$ ويعرف الراسب عند $z = \infty$ بالعلاقة التالية:

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C} f(z)dz = -c_{-1}$$

حيث C منحنٍ بسيط مغلق موجه باتجاه موجب ومحتوى في المنطقة $|z| > r$، ولحساب راسب في اللانهاية علينا إجراء التحويل $z = \frac{1}{t}$ وننشر التابع الناتج عند $t = 0$ وعندئذٍ يكون الراسب هو أمثال $(-t)$ والأمثلة توضح ذلك.

٢ . ٥ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

أوجد الراسب عند $z = \infty$ للدالة الآتية:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \cdots$$

الحل:

نجري التحويل $z = \frac{1}{t}$ فنجد أن:

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = t^2 + 2t + 3 + \frac{4}{t} + \frac{5}{t^2} + \cdots$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -2$$

مثال (٢):

أوجد راسب عند اللانهاية للتابع الآتي:

$$f(z) = e^z$$

الحل:

نجري التحويل $z=\frac{1}{t}$ فنجد أن:

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!.t^2}+\frac{1}{3!.t^3}+\frac{1}{4!.t^4}+\cdots$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\mathrm{Res}_{\infty}f(z)=R(\infty)=0$$

وذلك لأن الحد t غير موجود.

نظرية هامة:

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في C فإن الراسب عند اللانهاية يكون معدوماً.

مثال (٣):

احسب الراسب عند اللانهاية للدالة:

$$f(z)=z^3-z$$

الحل:

نجري التحويل $z=\frac{1}{t}$ فنجد أن:

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$R(\infty)=0$$

ملاحظة: كون الدالة $f(z)=z^3-z$ المعطاة تحليلية في $\mathbb{C}$ فيمكننا القول فوراً إن $R(\infty)=0$ وذلك حسب النظرية السابقة.

مثال (٤):

أوجد الراسب عند اللانهاية للدالة:

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

الحل:

نجري التحويل $z=\frac{1}{t}$ فنجد أن:

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{t\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\frac{t^6}{7!}+\cdots\right)}$$

وبعد إجراء عملية القسمة المعتادة نجد أن :

$$R(\infty)=\frac{-1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

مثال (٤):

أوجد راسب الدالة التالية:

$$f(z)=\frac{\cot g(z).\coth(z)}{z^3}$$

وذلك في جوار الصفر.

الحل:

إن التابع $f(z)$ يكتب بالشكل التالي:

$$f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}.\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.\frac{1}{z^3}$$

وبالاستفادة من المنشورات الآتية:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

نجد أن:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)}{\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)}$$

إما أن نستخدم عملية القسمة المعتادة او أن نستخدم جداء المتسلسلات لكوشي

وبالتالي نحصل على:

$$R(\infty) = \frac{-7}{45}$$

مثال (٦):

أوجد رواسب التابع :

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 . (z^2 + 4)}$$

وذلك عند جميع أقطابه.

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z+1)^2 . (z^2 + 4) = 0 \Rightarrow z = -1 \, , z = 2i \, , z = -2i$$

أما النقطتان $z = 2i \, , z = -2i$ فهما عبارة نقاط شاذة معزولة للدالة $f(z)$ وهما عبارة عن أقطاب بسيطة(يمكن التحقق من ذلك).

والنقطة $z=-1$ هي عبارة عن نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ وهي عبارة عن قطب مرتبة ثانية (أيضاً يمكن التحقق من ذلك).

لنحسب الراسب للدالة $f(z)$ عند $z=2i$ نلاحظ أن الدالة $f(z)$ تكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2.(z^2+4)}=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2.(z+2i)(z-2i)}$$

$$=\frac{\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2.(z+2i)}}{(z-2i)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

والأكثر من ذلك: $\psi'(2i)=1\neq 0$

وكون أن النقطة $z=2i$ هي عبارة عن قطب بسيط للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(2i)=\frac{\varphi(2i)}{\psi'(2i)}=\frac{\left[\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2.(z+2i)}\right]_{z=2i}}{1}=\frac{(2i)^2-2(2i)}{(2i+1)^2.(4i)}$$

$$=\frac{-4-4i}{(-3+4i).(4i)}=$$

$$=\frac{-4-4i}{-12i-16}=\frac{1+i}{3i+4}=\frac{(1+i)(4-3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{i+7}{25}=\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i$$

لحساب الراسب للتابع $f(z)$ في النقطة $z=-2i$ يمكن حسابه بنفس طريقة حساب الراسب للتابع $f(z)$ في النقطة $z=2i$ ولكن حسب نتيجة سابقة وكون أن كلاً من النقطتين $z=2i$ و$z=-2i$ هما عبارة عن أقطاب بسيطة، وأن $z=2i$ هي مرافق للنقطة $z=-2i$ ومن ثمَّ يكون:

$$\text{Res}[f(z),-2i]=\overline{\text{Res}[f(z),2i]}$$

أي إن راسب التابع $f(z)$ في النقطة $z=-2i$ هو:

$$R(-2i) = \overline{R(2i)} = \overline{\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$$

إن الراسب للنقطة $z = -1$ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب يكون:

$$R(-1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z+1)^2 . f(z)]$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 - 2z}{(z^2+4)} \right] =$$

$$\lim_{z \to -1} \left[\frac{(2z-2)(z^2+4) - 2z(z^2-2z)}{(z^2+4)^2} \right]$$

$$= \frac{(-4)(5) + 2(3)}{25} = \frac{-14}{25} \Longrightarrow R(-1) = \frac{-14}{25}$$

مثال (٧):

أوجد راسب الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$$

وذلك في جوار الصفر.

الحل:

حسب تعريف الراسب للدالة $f(z)$ في النقطة $z = 0$ فإن الراسب هو عبارة عن العدد العقدي: $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)dz$، الذي هو أمثال الحد $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ المعطى والمنشور بجوار $z = 0$.

نعلم أن:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

وبالعودة للتابع $f(z)$ نجد أن:

$$f(z)=\frac{1}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)}=\frac{1}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^9}{9!}\cdots}$$

وباستخدام عملية القسمة المعتادة نجد أن:

$$\frac{3!}{z^3}+\frac{(3!)^2}{(5!)z}$$

$$\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^9}{9!}\cdots \quad \Big| \quad 1$$

$$(-) \qquad 1-\frac{(3!)z^2}{5!}+\frac{(3!)z^4}{7!}-\frac{(3!)z^6}{9!}\cdots$$

$$0+\frac{(3!)z^2}{5!}-\frac{(3!)z^4}{7!}+\frac{(3!)z^6}{9!}\cdots$$

$$(-) \qquad \frac{(3!)z^2}{5!}-\frac{(3!)^2z^4}{(5!)^2}+\frac{(3!)^2z^6}{(5!)(7!)}-\cdots$$

$$\left(\frac{(3!)^2}{(5!)^2}-\frac{(3!)}{7!}\right)z^4+\left(\frac{(3!)}{9!}-\frac{(3!)^2}{(5!)(7!)}\right)z^6+\cdots$$

نعلم أنه عند تقسيم البسط على المقام في الكسر فإن ناتج الكسر يكون:

الكسر = ناتج القسمة + $\dfrac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}}$

وبالتالي يكون لدينا:

$$f(z)=\frac{1}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)}=\frac{1}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\cdots}=$$

$$\frac{3!}{z^3}+\frac{(3!)^2}{(5!)z}+\frac{\left(\frac{(3!)^2}{(5!)^2}-\frac{(3!)}{7!}\right)z^4+\left(\frac{(3!)}{9!}-\frac{(3!)^2}{(5!)(7!)}\right)z^6+\cdots}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^9}{9!}\cdots}$$

ملاحظة إضافية هامة: إن الكسر الأخير الذي نتج لدينا إذا حاولنا تقسيمه فلن يحوي حدوداً لـ $\frac{1}{z}$.

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$R(0) = c_{-1} = \frac{(3!)^2}{(5!)} = \frac{3}{10}$$

ملاحظة إضافية هامة: من النشر السابق نستنتج أن النقطة $z = 0$ هي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة؛ وذلك لأن أعلى درجة لقوى $\frac{1}{z}$ هي من الدرجة الثالثة، ويمكن التحقق من ذلك باستخدام التعريف.

مثال (٨):

لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = e^z . \csc^2 z$$

والمطلوب: أوجد راسب التابع $f(z)$ عند جميع أقطابه.

الحل:

تذكرة:

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} \ \& \ \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

إن التابع $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = e^z . \left(\frac{1}{\sin z}\right)^2 = \frac{e^z}{\sin^2 z}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$\sin^2 z = 0 \Rightarrow \sin z = 0 \Rightarrow z_k = \pi k \quad ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

إن النقاط الشاذة السابقة هي عبارة عن نقاط شاذة معزولة للتابع $f(z)$ المعطى وهي عبارة عن أقطاب من المرتبة الثانية لأن:

$$\lim_{z\to z_k=\pi k}(z-z_k)^2.\frac{e^z}{\sin^2 z}=\frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال فنجد أن:

$$\lim_{z\to z_k=\pi k}(z-z_k)^2.\frac{e^z}{\sin^2 z}=$$

$$=\quad \lim_{z\to z_k=\pi k}\frac{2(z-z_k)e^z+(z-z_k)^2.e^z}{2\sin z.\cos z}=\frac{0}{0}$$

ونطبق أوبيتال مرة ثانية نجد أن:

$$\lim_{z\to z_k=\pi k}\frac{2(z-z_k)e^z+(z-z_k)^2.e^z}{2\sin z.\cos z}$$
$$=\lim_{z\to z_k=\pi k}\frac{2e^z+4(z-z_k)e^z+(z-z_k)^2.e^z}{2\cos^2 z-2\sin^2 z}$$
$$=\frac{e^{z_k}}{\cos^2 z_k}=\frac{e^{\pi k}}{\cos^2 \pi k}=e^{\pi k}\neq 0$$

إذاً حسب التعريف تكون النقاط $z_k=\pi k$ هي عبارة عن أقطاب من المرتبة الثانية، وبحيث إن $k\in Z$ ، ومن ثم فحسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(z_k=\pi k)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\pi k}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\pi k)^2.e^z}{\sin^2 z}\right]$$
$$=\lim_{z\to\pi k}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\pi k)^2.e^z}{\sin^2 z}\right]$$
$$=\lim_{z\to\pi k}\left[\frac{2(z-\pi k)e^z+(z-\pi k)^2.e^z}{2\sin z.\cos z}\right]=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال فنجد:

$$\lim_{z\to\pi k}\left[\frac{4(z-\pi k)e^z+(z-\pi k)^2.e^z+2e^z}{2\sin z.\cos z}\right]$$

$$=\lim_{z\to\pi k}\left[\frac{2e^z+4(z-z_k)e^z+(z-z_k)^2.e^z}{2\cos^2 z-2\sin^2\ z}\right]$$

$$=\frac{e^{\pi k}}{\cos^2\pi k}=e^{\pi k}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$R(\pi k)=e^{\pi k}\qquad ;k\in Z$$

وهي قيمة الرواسب للدالة $f(z)$ المعطاة عند جميع أقطابها.

٢ . ٦ . مبرهنة الرواسب:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ووحيدة القيمة (أي دالة نظامية) داخل وعلى منحنٍ بسيط مغلق C باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$ عندئذٍ يكون:

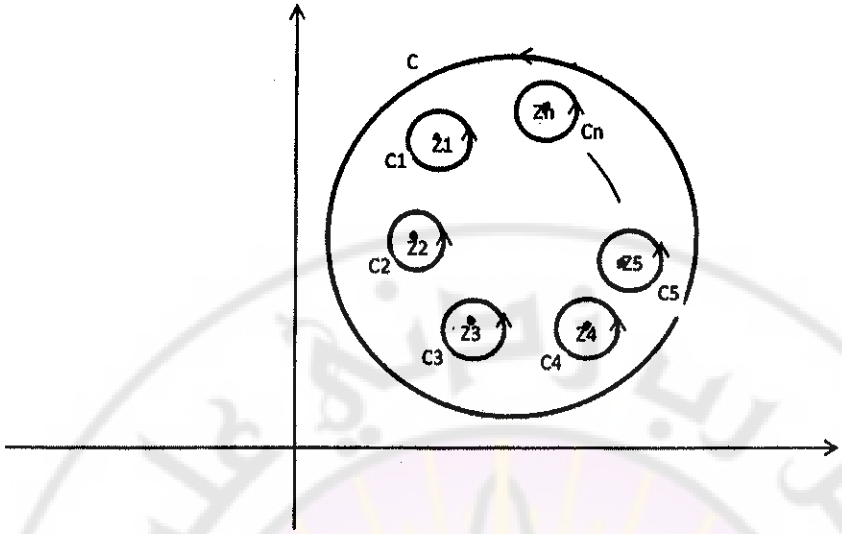
$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\big(R(z_1)+R(z_2)+R(z_3)+\cdots R\ (z_n)\big)$$

$$\Rightarrow\int_C f(z)\quad dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),z_k]$$

البرهان:

إذا فرضنا أن النقاط الشاذة هي $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$ تقع داخل المنحني C الذي نقوم بالمكاملة عليه كما في الشكل (١).

ولنحط كل نقطة من تلك النقاط بدائرة صغيرة نصف قطرها صغير بقدر كافٍ ومراكزها هي تلك النقاط الشاذة، وبحيث إن جميع هذه الدوائر تقع داخل C ولا يتقاطع بعضها مع بعض ولا تتقاطع مع C وموجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة وفق الشكل (١) الآتي:



الشكل (١)

علاوة على ذلك، بما أن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C (التكامل على المنحني الخارجي يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية) فعندئذٍ يكون:

$$\int_{C} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \cdots \int_{C_n}$$

ولكن كما وجدنا من تعريف الراسب أن:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i.\,R(z_1) \qquad \int_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i.\,R(z_2)$$

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i.\,R(z_3) \qquad \int_{C_4} f(z)\,dz = 2\pi i.\,R(z_4)$$

وهكذا....

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = 2\pi i.\,R(z_n)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \cdots \int_{C_n} f(z)dz$$

أي إن:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i.R(z_1) + 2\pi i.R(z_2) + 2\pi i.R(z_3) + \cdots 2\pi i.R\,(z_n) =$$

$$= 2\pi i\big(R(z_1) + R(z_2) + R(z_3) + \cdots R\,(z_n)\big) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

وهو المطلوب.

٢ . ٧ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

باستخدام مبرهنة الرواسب احسب التكامل الآتي:

$$\int_C \frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz$$

بحيث:

١ . $C_1 : |z| = 1$.

٢ . $C_2 : |z| = 5$

٣ . C_3 القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

الحل:

إن التابع المستكمل والذي سنرمز لها بالرمز $f(z)$ هو:

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}$$

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^3(z^2+4)=0 \Longrightarrow z=0\,,z=2i\,,z=-2i$$

١ . لنبدأ بالمنطقة الأولى:

التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني $C_1\ :\ |z|=1$ في النقطة $z=0$ فقط ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_1}\frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz=2\pi i.R(0)$$

إيجاد راسب الدالة $f(z)$عند النقطة الشاذة $z=0$. إن النقطة $z=0$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثالثة بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\cos z}{(z^2+4)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{-\sin z(z^2+4)-2z.\cos z}{(z^2+4)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{\left(-\cos z\left(z^2+4\right)-2z.\sin z-2\cos z+2z.\sin z\right)}{\left(z^2+4\right)^4}\right.$$

$$\left.\frac{.\left(z^2+4\right)^2-4z\left(z^2+4\right)\left(-\sin z(z^2+4)-2z.\cos z\right)}{\left(z^2+4\right)^4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{(-4-2)(4)^2}{4^4}=\frac{-6}{32}=\frac{-3}{16}$$

ملاحظة:

يمكن حساب الراسب السابق من خلال عملية قسمة البسط على المقام للكسر الذي يمثله التابع f(z) ويكون الراسب أمثال $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران الناتجة.

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\int_C \frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz = 2\pi i.\,R(0) = 2\pi i.\left(\frac{-3}{16}\right) = \frac{-3\pi}{8}i$$

٢ . التابع f(z) يفقد تحليليه في المنطقة $C_2: |z| = 5$ في جميع النقاط الشاذة له ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_2} \frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz = 2\pi i.\left(R(0) + R(2i) + R(-2i)\right)$$

ولنوجد الآن راسب الدالة f(z) عند النقطة الشاذة $z = 2i$. إن النقطة $z = 2i$ هي عبارة عن قطب بسيط بالنسبة للدالة f(z) ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(2i) = \lim_{z\to 2i}\left[\frac{\cos z}{z^3.(z+2i)}\right] = \frac{\cos 2i}{(2i)^3.(4i)} = \frac{ch2}{32} = \frac{3,762}{32}$$
$$= 0,1176$$

وحسب نتيجة معروفة سابقاً يكون أيضاً:

$$R(-2i) = \overline{R(2i)} = \overline{\left(\frac{ch2}{32}\right)} = \overline{0,1176} = 0,1176$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_{C_2} \frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz = 2\pi i.\left(R(0) + R(2i) + R(-2i)\right)$$

$$= 2\pi i.\big(R(0) + 2R(2i)\big) = 2\pi i.\left(\left(\frac{-3}{16}\right) + 2\left(\frac{ch2}{32}\right)\right)$$

$$= \frac{(ch2 - 3)\pi}{8} i = (0,29)i$$

٣ . C_3 القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

نلاحظ أن جميع النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ المعطاة تقع داخل القطع الناقص السابق، ولكن لنتذكر النتيجة التي حصلنا عليها من مبرهنة كوشي (تحليل عقدي ١)، ليكن $f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة الواقعة بين المنحنيين البسيطين المغلقين C_1 , C_2 بحيث يقع أحدهما وليكن C_1 مثلاً ضمن المنحني C_2 والتابع $f(z)$ يكون تحليلياً في كل نقطة من نقاط المنحنيين السابقين عندئذٍ يكون:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

بالعودة للتمرين نجد أن القطع الناقص:

$$C_3: \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

يقع بأكمله داخل المنحني: $C_2 : |z| = 5$

ومحقق لشروط النتيجة السابقة ومن ثمَّ:

$$\int_{C_3} \frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz = \int_{C_2} \frac{\cos z}{z^3(z^2+4)}dz = \frac{(ch2-3)\pi}{8} i = (0,29)i$$

مثال (٢):

احسب التكامل التالي:

$$\int_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz$$

وحيث: $C : |z| = 3$

الحل:

إن دالة المكاملة $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$$

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2\,(z^2+2z+2) = 0 \Rightarrow z^2\,(z-(i-1))\,(z+(1+i)) = 0 \Rightarrow$$

$$z = 0\,, z = i-1\,, z = -(1+i)$$

التابع المراد مكاملته يفقد تحليليته في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني $C: |z|= 3$ في جميع النقاط الشاذة له ومن ثمّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz = 2\pi i.\left[R(0)+R(i-1)+R\big(-(i+1)\big)\right]$$

إيجاد راسب الدالة $f(z)$عند النقطة الشاذة $z = 0$. إن النقطة $z = 0$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2+2z+2)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{t.\,e^{zt}(z^2+2z+2)-(2z+2).\,e^{zt}}{(z^2+2z+2)^2}\right] =$$

$$= \frac{t(2)-2}{(2)^2} = \frac{t-1}{2}$$

إيجـاد راسـب الدالـة $f(z)$ عنـد النقطـة الشـاذة $z = i - 1$. إن النقطـة $z = i - 1$ هي عبارة عن قطب بسيط بالنسبة للدالة $f(z)$، ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(i-1) = \lim_{z \to i-1} \left[\frac{e^{zt}}{z^2(z + (1+i))} \right] = \frac{e^{(i-1)t}}{(i-1)^2.(2i)} = \frac{e^{(i-1)t}}{4}$$

$$= \frac{e^{it}.e^{-t}}{4} = \frac{(\cos t + i.\sin t).e^{-t}}{4}$$

$$= \left(\frac{\cos t.e^{-t}}{4} \right) + i \left(\frac{\sin t.e^{-t}}{4} \right)$$

وحسب نتيجة معروفة يكون أيضاً:

$$R(-(i+1)) = \overline{R(i-1)} = \overline{\left(\frac{\cos t.e^{-t}}{4} + i.\frac{\sin t.e^{-t}}{4} \right)}$$

$$= \left(\frac{\cos t.e^{-t}}{4} \right) - i \left(\frac{\sin t.e^{-t}}{4} \right)$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz = 2\pi i.\left[R(0) + R(i-1) + R\big(-(i+1)\big)\right]$$

$$= 2\pi i.\left(\frac{t-1}{2} + \left(\frac{\cos t.e^{-t}}{4} \right) + i \left(\frac{\sin t.e^{-t}}{4} \right) + \left(\frac{\cos t.e^{-t}}{4} \right) - i \left(\frac{\sin t.e^{-t}}{4} \right) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{t-1}{2} + \frac{\cos t.e^{-t}}{2} \right) = \pi i(t - 1 + \cos t.e^{-t})$$

إذاً نستنتج أن:

$$\int_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz = \pi i(t - 1 + \cos t.e^{-t})$$

مثال(٣):

احسب التكامل:

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)^4}\,dz \qquad ;\ C : |z| = 4$$

الحل:

إن التابع المراد مكاملتهُ وليكن $f(z)$ هو:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)^4}$$

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2(z-\pi i)^4 = 0 \Longrightarrow$$
$$z = 0\,, z = \pi i$$

التـابع المـراد مكاملتـه يفقـد تحليليتـه في المنطقـة المحـدودة والمغلقـة بـالمنحني $C\ :\ |z| = 4$ في جميع النقاط الشاذة له ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)^4}\,dz = 2\pi i.\,[R(0) + R(\pi i)]$$

إيجاد راسب الدالة $f(z)$عند النقطة الشاذة $z = 0$. إن النقطة $z = 0$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{(z-\pi i)^4}\right]$$
$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z(z-\pi i)^4 - 4(z-\pi i)^3.\,e^z}{(z-\pi i)^8}\right] = \frac{(-\pi i)^4 - 4(-\pi i)^3}{(-\pi i)^8}$$
$$= \frac{\pi^4 - 4\pi^3 i}{\pi^8} = \frac{\pi - 4i}{\pi^5} \Longrightarrow R(0) = \frac{\pi - 4i}{\pi^5}$$

إيجاد راسب الدالة $f(z)$عند النقطة الشاذة $z = \pi i$. إن النقطة $z = \pi i$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الرابعة(يمكن التحقق من ذلك) بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(\pi i) = \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to\pi i}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{e^z}{z^2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to\pi i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^z\cdot z^2 - 2z\cdot e^z}{z^4}\right] = \frac{1}{6}\lim_{z\to\pi i}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^z}{z^2} - \frac{2e^z}{z^3}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to\pi i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z\cdot z^2 - 2ze^z}{z^4} - \frac{2e^z z^3 - 6e^z z^2}{z^6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to\pi i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z^2} - \frac{4e^z}{z^3} + \frac{6e^z}{z^4}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{z\to\pi i}\left[\frac{e^z\cdot z^2 - 2ze^z}{z^4} - \frac{4e^z z^3 - 12z^2 e^z}{z^6} + \frac{6e^z z^4 - 24z^3 e^z}{z^8}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(\pi i)^3\cdot e^{\pi i} - 6e^{\pi i}\cdot(\pi i)^2 + 18e^{\pi i}\cdot(\pi i) - 24e^{\pi i}}{(\pi i)^5}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(-\pi^3 i)\cdot(-1) - 6(-1)\cdot(-\pi^2) + 18(-1)\cdot(\pi i) - 24(-1)}{\pi^5 i}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{i\pi^3 - 6\pi^2 - 18\pi i + 24}{\pi^5 i}\right]$$

$$= -\frac{i}{6}\left[\frac{\pi^3 i - 6\pi^2 - 18\pi i + 24}{\pi^5}\right] = \frac{\pi^3 + 6\pi^2 i - 18\pi - 24i}{6\pi^5}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$R(\pi i) = \frac{\pi^3 + 6\pi^2 i - 18\pi - 24i}{6\pi^5}$$

ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)^4}\,dz = 2\pi i.\left[R(0) + R(\pi i)\right]$$

$$= 2\pi i.\left[\frac{\pi - 4i}{\pi^5} + \frac{\pi^3 + 6\pi^2 i - 18\pi - 24i}{6\pi^5}\right]$$

$$= 2\pi i.\left[\frac{6\pi - 24i + \pi^3 + 6\pi^2 i - 18\pi - 24i}{6\pi^5}\right]$$

$$= 2\pi i.\left[\frac{\pi^3 + 6\pi^2 i - 12\pi - 48i}{6\pi^5}\right]$$

$$= \left[\frac{i\pi^3 - 6\pi^2 - 12\pi i + 48}{3\pi^4}\right]$$

$$= \frac{-6\pi^2 + 48 + (-12\pi + \pi^3)i}{3\pi^4} \quad \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)^4}\,dz = \left(\frac{16}{\pi^4} - \frac{2}{\pi^2}\right) + \left(\frac{-12\pi + \pi^3}{3\pi^4}\right)i$$

مثال (٤):

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_C \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}\,dz$$

وبحيث إن:

$$C : |z| = 1$$

الحل:

إن دالة المكاملة $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}$$

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$\frac{1}{2}-\sin^2 z=0 \Rightarrow \sin^2 z=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin z=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z_k=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+k\right)$$

$$; k=0,\pm 1,\ldots$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة للدالة $f(z)$ وهي عبارة عن أقطاب بسيطة.

ولكن التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في المنطقة $|z|=1$ في النقطتين $z_0=\frac{\pi}{4}$، والنقطة الثانية هي $z_{-1}=\frac{-\pi}{4}$ أما باقي نقاط z_k وبحيث $k=+1,\pm 2,\pm 3,\ldots$ يكون التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة المعطاة ومن ثمّ حسب مبرهنة الرواسب نجد:

$$\int_C \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}\,dz=2\pi i.\left[R\left(\frac{\pi}{4}\right)+R\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

إيجاد راسب الدالة المستكملة عند النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{4}$. إن النقطة $z=\frac{\pi}{4}$ هي عبارة عن قطب بسيط بالنسبة للدالة $f(z)$ وكما نلاحظ أن الدالة $f(z)$ تكتب بالشكل التالي:

$$f(z)=\frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}=\frac{z}{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2z}{2}\right)}=\frac{2z}{\cos 2z}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

والأكثر من ذلك $\psi'\left(\frac{\pi}{4}\right)=[\cos 2z]'_{z=\frac{\pi}{4}}=-2\neq 0$

ومن ثمّ حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\psi'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}}{-2}=\frac{-\pi}{4}$$

إيجاد راسب الدالة المستكملة عند النقطة الشاذة $z=\frac{-\pi}{4}$. إن النقطة السابقة هي عبارة عن قطب بسيط بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\frac{-\pi}{4}}\left[\frac{z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}\right] = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال فنجد:

$$\lim_{z\to\frac{-\pi}{4}}\left[\frac{z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}\right] = \lim_{z\to\frac{-\pi}{4}}\left[\frac{2z+\frac{\pi}{4}}{-2\sin z.\cos z}\right] = \frac{\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{2\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-\pi}{4}$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_C \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}dz = 2\pi i.\left[R\left(\frac{\pi}{4}\right)+R\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\pi i.\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi i\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\pi^2 i$$

إذاً نستنتج أن:

$$\int_C \frac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}dz = -\pi^2 i$$

وبحيث إن: $C : |z| = 1$

مثال (٥):

أوجد قيمة التكامل: $\int_C f(z)dz$

إذا علمت أن:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2(z^2+1)}$$

وذلك في الحالات التالية:

1) $C_1 : |z| = \frac{1}{2}$ 2) $C_2 : |z-i| = \frac{1}{2}$

$$3)\ C_3 : |z+i| = \frac{1}{2} \qquad 4)\ C_4 : |z| = 2$$

$$C_5 : |z-2| = 1$$

الحل:

إن دالة المكاملة $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2(z^2+1)}$$

١ . النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2\,(z^2+1) = 0 \Rightarrow z = 0\,,\ z = i\,,\ z = -\,i$$

بالنسبة للمنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C_1.

التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في المنطقة $C_1\ :\ |z| = \frac{1}{2}$ في النقطة $z = 0$ فقط ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_1} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)}\,dz = 2\pi i.\,R(0)$$

إيجاد راسب الدالة المستكملة عند النقطة الشاذة $z = 0$. إن النقطة $z = 0$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+2}{(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{(z^2+1) - 2z.\,(z+2)}{(z^2+1)^2}\right] = 1$$

$$\int_{C_1} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)}\,dz = 2\pi i.\,R(0) = 2\pi i.\,(1) = 2\pi i$$

٢ . التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني $C_2\ :\ |z-i| = \frac{1}{2}$ في النقطة $z = i$ فقط ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_2} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i . R(i)$$

إيجاد راسب الدالة المستكملة عند النقطة الشاذة $z = i$. إن النقطة $z = i$ هي عبارة عن قطب بسيط بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(i) = \lim_{z \to i} \left[\frac{z+2}{z^2(z+i)} \right] = \frac{i+2}{-2i} = \frac{-1}{2} + i$$

بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_2} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i . R(i) = 2\pi i \left(\frac{-1}{2} + i \right) = \pi i (2i - 1)$$

٣ . التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني $C_3 \ : |z+i| = \frac{1}{2}$ في النقطة $z = -i$ فقط ومن ثمّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_3} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i . R(-i)$$

إيجاد راسب الدالة المستكملة عند النقطة الشاذة $z = -i$. إن النقطة $z = -i$ هي عبارة عن قطب بسيط بالنسبة للدالة $f(z)$ ومن ثمّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(-i) = \lim_{z \to -i} \left[\frac{z+2}{z^2(z-i)} \right] = \frac{-i+2}{2i} = \frac{-1}{2} - i$$

أو يمكن تطبيق النتيجة $R(-i) = \overline{R(i)}$.

وبحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_3} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i . R(-i) = 2\pi i \left(\frac{-1}{2} - i \right) = \pi i (-2i - 1)$$

٤ . التابع $f(z)$ يفقد تحليليته في المنطقة $C_4 : \ |z| = 2$ في جميع النقاط الشاذة له ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C_4} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i . [R(0) + R(i) + R(-i)]$$

ولكن حسب ما سبق وجدنا أن:

$$R(0) = 1 \ , R(i) = \frac{-1}{2} + i \, , R(-i) = \frac{-1}{2} - i$$

ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب يكون لدينا:

$$\int_{C_4} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 2\pi i \big(R(0) + \ R(i) + R(-i)\big) =$$

$$2\pi i \left(1 + \frac{-1}{2} + i + \frac{-1}{2} - i\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{C_4} \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)^4} dz = 0$$

٥ . إن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C_5 ومن ثمَّ حسب نظرية كوشي يكون التكامل معدوم أي إن:

$$\int_{C_5} \frac{z+2}{z^2(z^2+1)} dz = 0$$

٢ . ٨ . مبرهنة:

إذا كان $f(z)$ تابع تحليلياً باستثناء عدد منتهٍ من النقاط الشاذة المعزولة بما فيها اللانهاية أي باستثناء النقاط: $z_1, z_2, z_3, \dots z_n, z = \infty$ عندئذٍ يكون:

$$R(z_1) + R(z_2) + \cdots + R\,(z_n) + R(\infty) = 0$$

$$\Longrightarrow R(\infty) = -\big(R(z_1) + R(z_2) + \cdots + R\,(z_n)\big)$$

تبين لنا هذه المبرهنة أنه إذا أردنا مكاملة التابع $f(z)$ على منحنٍ بسيط مغلق يحوي بداخله جميع النقاط الشاذة $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$، فإن قيمة التكامل:

$$\int_c f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

ولذلك لحساب التكامل يكفي أن نحسب راسب التابع $f(z)$ في اللانهاية، وهذا يعني أننا نحسب راسباً واحداً للتابع $f(z)$ في اللانهاية بدلاً من حساب n راسباً للتابع $f(z)$ في n نقطة، ولعل المثال الآتي يوضح هذه المبرهنة.

مثال محلول:

احسب التكامل:

$$\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}dz$$

حيث c هو الدائرة $|z| = 2$.

الحل:

لحساب هذا التكامل نلاحظ أن للتابع:

$$f(z) = \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}$$

خمسة جذور هي $z = 0$ وهو قطب من المرتبة الثانية و z_0, z_1, z_2, z_3 التي تمثل الجذور من المرتبة الرابعة للواحد، والجذور الخمسة تقع جميعها داخل الدائرة $|z| = 2$، وبالاعتماد على النظرية السابقة فإن:

$$\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

لنحسب الراسب في اللانهاية:

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\operatorname{Res}\left[\frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)},\infty\right]$$

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=g(u)=\frac{\frac{1}{u^5}+\frac{1}{u}+1}{\left(\frac{1}{u}\right)^2\left[\left(\frac{1}{u}\right)^4-1\right]}=\frac{\frac{1+u^4+u^5}{u^5}}{\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{u^4}-1\right)}$$

$$=\frac{\frac{1+u^4+u^5}{u^5}}{\frac{1-u^4}{u^6}}$$

$$=\frac{1+u^4+u^5}{u^5}\frac{u^6}{1-u^4}$$

$$=\frac{u+u^5+u^6}{1-u^4}$$

$$=u-u^4-\ldots$$

ومنه:

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-1$$

ومن ثمَّ:

$$\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}dz=-2\pi i(-1)=2\pi i$$

ملاحظة: يمكن التحقق من قيمة التكامل التي حصلنا عليها، وذلك باستخدام مبرهنة الرواسب أي:

$$\int_C \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}dz=2\pi i.[R(0)+R(1)+R(-1)]$$

٢ . ٩ . تطبيقات مبرهنة الرواسب:

الحالة الأولى: وهي حساب التكامل من الشكل:

$$\mathbf{I} = \int_{0}^{2\pi} \mathbf{G}(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$$

لنستعرض المبرهنة التالية:

٢ . ٩ . ١ . مبرهنة (١):

إذا كان $G(\sin\theta, \cos\theta)$ تابعاً كسرياً جبرياً عادياً يتعين بـ$\cos\theta$ و$\sin\theta$ ويأخذ قيمة محددة من أجل جميع قيم الزاوية المنتمية للمجال $[0,2\pi]$ وإذا كان $f(z)$ هو التابع العقدي الذي نحصل عليه بتعويض $z = e^{i\theta}$ عندئذٍ يكون:

$$I = \int_{0}^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$$

وحيث $R_1, R_2, \ldots, R_n$ رواسب الدالة $f(z)$ عندأقطابها أي عند الأقطاب $a_1, a_2, \ldots, a_n$ والواقعة داخل دائرة الوحدة أي داخل $C : |z| = 1$.

البرهان:

إن المنحني الذي قمنا باختياره هو:

$$C: |z| = 1$$

وعلى هذه الدائرة يكون:

$z = e^{i\theta}$ وبحيث إن: $\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

ونعلم من علاقات أولر أن:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

ويكون أيضاً:
$$dz = i.e^{i\theta}d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{i.e^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$$

بالتعويض نحصل على:

$$\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \int_C G\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} =$$

$$\int_C F(Z)\frac{dz}{iz} = \int_C f(z)dz$$

والنقاط الشاذة لدالة المكاملة $f(z)$ هي عبارة عن أقطاب فقط ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$$

وحيث $R_1, R_2, \ldots, R_n$ رواسب الدالة $f(z)$ عندأقطابها.

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$$

٢ . ٩ . ١ . ١ . أمثلة محلولة:

مثال:

باستخدام مبرهنة الرواسب احسب التكامل الآتي:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos3\theta}{5 - 4\cos\theta}d\theta$$

الحل:

نلاحظ أن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\int_{0}^{2\pi}G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$$

ونلاحظ أن G هي عبارة عن تابع كسري جبري عادي ومعين بدلالة $\cos\theta$ ومن الملاحظ أنه يأخذ قيماً محددة من أجل جميع قيم الزاوية المنتمية للمجال $[0,2\pi]$ ومن ثمّ شروط المبرهنة (1) محققة والتكامل I هو تكامل من الحالة الأولى ويكون:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

وحيث $R_1,R_2,\dots R_n$ رواسب الدالة $f(z)$ عندأقطابها.

وبإجراء التحويل:

والتعويض نحصل على: $z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=i.e^{i\theta}d\theta$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\int_{C}\frac{\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)}{5-\frac{4}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}\quad;\ (C:|z|=1\ \text{حسب المبرهنة})$$

$$\Longrightarrow\int_{C}\frac{\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)}{5-\frac{4}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}.\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{2i}\int_{C}\frac{\left(\frac{z^6+1}{z^3}\right)}{\left(\frac{5z-\frac{4}{2}z^2-\frac{4}{2}}{z}\right)}.\frac{1}{z}dz=$$

$$\frac{1}{2i}\int_{C}\frac{z^6+1}{5z^4-2z^5-2z^3}dz=\frac{1}{2i}\int_{C}\frac{z^6+1}{-2z^3\left(z^2-\frac{5}{2}z+1\right)}dz=$$

$$\frac{i}{2}\int_C \frac{z^6+1}{2z^3\left(z^2-\frac{5}{2}z+1\right)}dz = \frac{i}{2}\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz \quad \dots (*)$$

لنوجد قيمة التكامل :

$$\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz$$

إن دالة المكاملة للتكامل السابق ولتكن $f(z)$ هي:

$$f(z) = \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}$$

وكما نعلم النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^3(2z-1)(z-2) = 0 \Longrightarrow z = 0, z = 2, z = \frac{1}{2}$$

وأن الدالة $f(z)$ السابقة تفقد تحليليتها في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني $C : |z| = 1$ في النقطتين $z = 0, z = \frac{1}{2}$ فقط ومن ثمَّ وبحسب مبرهنة الرواسب يكون:

$$\int_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz = 2\pi i.\left(R(0) + R\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

لنحسب الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z = 0$.

إن النقطة $z = 0$ هي عبارة عن قطب من المرتبة الثالثة للدالة $f(z)$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^6+1}{2z^2-5z+2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{6z^5(2z^2-5z+2)-(4z-5).(z^6+1)}{(2z^2-5z+2)^2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{12z^7-30z^6+12z^5-4z^7-4z+5z^6+5}{(2z^2-5z+2)^2}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{8z^7-25z^6+12z^5-4z+5}{(2z^2-5z+2)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{(56z^6-150z^5+60z^4-4)(2z^2-5z+2)^2-2(4z-5)(2z^2-5z+2)(8z^7-25z^6+12z^5-4z+5)}{(2z^2-5z+2)^4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(-4)(4)-2(-5)(2)(5)}{2^4}\right)=\left(\frac{-16+100}{2^5}\right)=\frac{84}{32}=\frac{21}{8}$$

إذاً نستنتج أن:

$$R(0)=\frac{21}{8}$$

لنوجد الراسب للدالة $f(z)$ في النقطة الشاذة المعزولة $z=\frac{1}{2}$.

إن النقطة $z=\frac{1}{2}$ هي عبارة عن قطب بسيط ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^6+1}{2z^3(z-2)}=\frac{\frac{1}{2^6}+1}{\frac{2}{2^3}\left(\frac{1}{2}-2\right)}=\frac{\frac{65}{64}}{\frac{-3}{8}}=\frac{-65}{24}$$

ومن ثمَّ نجد أنه حسب مبرهنة الرواسب:

$$\int_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz=2\pi i.\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right)=\frac{-\pi}{6}i$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\frac{i}{2}\int_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz=\frac{i}{2}.\left(\frac{-\pi}{6}i\right)=\frac{\pi}{12}$$

ومن ثمَّ حسب المبرهنة (1) وشروطها المحققة نجد أن:

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{12}$$

تمرين:

باستخدام مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b.\cos\theta}d\theta \qquad ; a\le |b|$$

الحل:

نلاحظ أن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b.\cos\theta}d\theta=\int_{0}^{2\pi}G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$$

ونلاحظ أن G هي عبارة عن تابع كسري جبري عادي ومعين بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ والتكامل I هو تكامل من الحالة الأولى من تطبيقات مبرهنة الرواسب ولكن من الملاحظ أنه لا يأخذ قيمة محددة من أجل قيم للزاوية θ المنتمية للمجال $[0,2\pi]$ ومن ثمَّ شروط المبرهنة (1) غير محققة، وذلك ضمن الشرط المفروض في نص التمرين:

$$a\le |b|$$

$$a+b.\cos\theta=0\Rightarrow \cos\theta=\frac{-a}{b}$$

ومن ثمَّ لا يمكن إيجاد التكامل باستخدام مبرهنة الرواسب.

تمرين:

باستخدام مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{4+3.\cos\theta}$$

الحل:

نلاحظ أن الدالة المراد إكمالها تحقق شروط المبرهنة (1) ومن ثمَّ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4+3.\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{zi}}{4+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{4z+\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+8z+3} \quad .... (*)$$

لنحسب:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+8z+3}$$

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$3z^2+8z+3=0$ وعن طريق المميز نجد أن:

$$\Delta = 64-4(3)(3) = 64-36 = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$$

ويكون:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{7}-8}{6} = \frac{\sqrt{7}-4}{3}$$

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{7}-8}{6} = \frac{-(\sqrt{7}+4)}{3}$$

وهي النقاط الشاذة ونلاحظ أن z_1 تنتمي إلى دائرة الوحدة أما z_2 فواضح أنها لا تنتمي ومن ثمَّ بحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+8z+3} = 2\pi i.\, R\left(\frac{\sqrt{7}-4}{3}\right)$$

ولكن النقطة $z = \frac{\sqrt{7}-4}{3}$ هي نقطة شاذة معزولة وهي عبارة عن قطب بسيط ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R\left(\frac{\sqrt{7}-4}{3}\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{3\left(z + \frac{(\sqrt{7}+4)}{3}\right)} = \frac{1}{3z_1 + (\sqrt{7}+4)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}-4+\sqrt{7}+4} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$R\left(\frac{\sqrt{7}-4}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+8z+3} = \frac{2}{i}.(2\pi i)\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{7}} \quad \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4+3.\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}$$

تمرين:

احسب التكامل:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b.\sin\theta} \quad ; \quad a > |b|$$

الحل:

إن التابع المراد مكاملته G هو تابع كسري جبري عادي وله قيمة محددة في المجال $[0,2\pi]$ والمقام لا ينعدم من أجل الشرط $a > |b|$ أي التابع G محقق لشروط المبرهنة (١) ومن ثمَّ نجري التحويل ونعوض فنجد أن:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b.\sin\theta} = \int_C \frac{\frac{dz}{zi}}{a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

ومن ثمَّ لنحسب :

$$\int_C \frac{\frac{dz}{zi}}{a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = 2\int_C \frac{dz}{bz^2 + 2aiz - b}$$

إن النقاط الشاذة للتابع المراد مكاملته وليكن $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$bz^2 + 2aiz - b = 0$$

وعن طريق المميز نجد أن:

$$\Delta = -4a^2 - 4(b)(-b) = -4a^2 + 4b^2 = 4(b^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{a^2 - b^2}$$

ويكون:

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{a^2 - b^2} - 2ai}{2b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b}.i$$

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{a^2 - b^2} - 2a}{2b} = \frac{-\left(\sqrt{a^2 - b^2} + a\right)}{b}.i$$

فإذا كانت z_1 تنتمي إلى دائرة الوحدة فإنها سوف تحقق:

$$|z_1| < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b} < 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} - a < b$$

وبتربيع الطرفين نجد:

$$\sqrt{a^2 - b^2} - a < b \Rightarrow a^2 - b^2 + a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} < b^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2b^2 < 2a\sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow a^2 - b^2 < a\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} < a \Rightarrow \text{بالتربيع} \Rightarrow a^2 - b^2 < a^2 \Rightarrow b^2 > 0$$

ومن ثمَّ z_1 تنتمي إلى دائرة الوحدة إذا كان $0 > b^2$.

أما بالنسبة لـ z_2 فنجد أيضاً أنه حتى تنتمي لدائرة الوحدة فإنها تحقق:

$$|z_2| < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{b} < 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 - b^2} + a < b$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} < b - a < 0$$

وهذا غير ممكن ومن ثمَّ فإن z_2 لاتنتمي إلى دائرة الوحدة ومن هذا كله يكون:

$$2\int_C \frac{dz}{bz^2 + 2aiz - b} = 2.(2\pi i).R(z_1)$$

أما راسب النقطة فهو:

$$R(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{z - z_2} = \frac{1}{z_1 - z_2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}i - \frac{a}{b}i + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}i + \frac{a}{b}.i}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{i}$$

ومن ثم فإن:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cdot\sin\theta} = 2\int_c \frac{dz}{bz^2 + 2aiz - b} = \frac{2}{b}\int_c \frac{dz}{z^2 + \frac{2a_i}{b}z - 1}$$

$$= \frac{2}{b}\cdot(2\pi i)\cdot\left(\frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\cdot\frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

مثال:

احسب التكامل التالي:

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a.\cos\theta + a^2} d\theta \qquad ; \; a^2 < 1 \;\Rightarrow -1 < a < +1$$

الحل:

طريقة (1):المجال المعطى هو $[0, \pi]$ وحتى يصبح المجال طوله $[0,2\pi]$ نحتاج إلى إضافة تكامل آخر من π - إلى الصفر.

طريقة ثانية إضافية: إن التكامل I هو تكامل حقيقي ولنتبع الخطوات التالية التي درسناها في مقرر تحليل(2) (حساب التكامل).

نجري تغيير في المتحول θ من الشكل:

$$2\theta = \varphi$$

ولكن بإجراء هذا التحويل وكون أن التكامل I هو تكامل محدود فعندئذ حدود التكامل الجديدة تصبح:

الحد الأدنى للتكامل I $\theta_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 2(0) = 0$

الحد الأعلى للتكامل I $\theta_2 = \pi \Rightarrow \varphi_2 = 2(\pi) = 2\pi$

$$2\theta = \varphi \Rightarrow 2d\theta = d\varphi \;\Rightarrow d\theta = \frac{d\varphi}{2}$$

بالتعويض في التكامل I نجد أن:

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a.\cos\theta + a^2} d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{1 - 2a.\cos\frac{\varphi}{2} + a^2} \frac{d\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{1 - 2a.\cos\frac{\varphi}{2} + a^2} d\varphi$$

إن التكامل الذي تم الحصول عليه بعد إجراء التحويل هو تكامل من الشكل:

$$I = \int_0^{2\pi} G(\sin\varphi, \cos\varphi)\ d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{1 - 2a.\cos\frac{\varphi}{2} + a^2} d\varphi$$

وبحيث إن G تابع كسري كما نلاحظ جبري عادي يتعين ب $\cos\varphi$ وله قيمة محددة من أجل جميع قيم الزاوية φ والمنتمية إلى الفترة $[0,2\pi]$ والأكثر من ذلك هو تكامل من الحالة الأولى من تطبيقات مبرهنة الرواسب وجميع شروط المبرهنة (1) محققة ومن ثمّ بإجراء التحويل:

$$z = e^{i\theta} = e^{i\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow dz = i.e^{i\theta}d\theta = \frac{i}{2}.e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{2dz}{iz}$$

نحصل على:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{1 - 2a.\cos\frac{\varphi}{2} + a^2} d\varphi = \frac{1}{2}\int_C \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{1 - a\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2}.\frac{2}{iz}dz$$

$$= \frac{1}{2i}\int_C \frac{\left(\frac{z^4+1}{z^3}\right)}{\left(\frac{z - az^2 - a + a^2z}{z}\right)} dz = \frac{1}{2i}\int_C \frac{z^4+1}{z^2(-az^2 + (1+a^2)z - a)} dz \quad ....(*)$$

مهمتنا الآن إيجاد قيمة التكامل:

$$\int_C \frac{z^4+1}{z^2(-az^2 + (1+a^2)z - a)} dz \quad ; C : |z| = 1$$

إن دالة المكاملة للتكامل السابق هي:

$$f(z) = \frac{z^4+1}{z^2(-az^2 + (1+a^2)z - a)}$$

وكما نعلم النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2(-az^2 + (1+a^2)z - a) = 0 \Longrightarrow$$
$$z = 0 \quad , \quad -az^2 + (1+a^2)z - a = 0$$

أما بالنسبة للمعادلة الثانية عن طريق المميز نجد أن:

$$\Delta = (1+a^2)^2 - 4(-a)(-a) = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 =$$
$$a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2-1)^2 = (1-a^2)^2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-a^2)^2} = 1 - a^2$$

ومن ثمَّ:

$$z_1 = \frac{(1-a^2)-(1+a^2)}{-2a} = \frac{-2a^2}{-2a} = a$$
$$z_2 = \frac{-(1-a^2)-(1+a^2)}{-2a} = \frac{-2}{-2a} = \frac{1}{a}$$

ومن ثمَّ النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي:

$$z = 0\,, z_1 = a\,, z_2 = \frac{1}{a}$$

وهي نقاط شاذة معزولة بالنسبة للدالة $f(z)$ إن النقطتين $z = 0$ و $z_1 = a$ تقعان داخل دائرة الوحدة التي نقوم بالمكاملة عليها حسب المبرهنة(١) أما النقطة $z = \frac{1}{a}$ فهي تقع خارج دائرة الوحدة، وذلك لأنه حسب الفرض $a^2 < 1$ أي $-1 < a < +1$.

ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{z^4+1}{z^2(-az^2+(1+a^2)z-a)}dz = 2\pi i.[R(0)+R(a)]$$

لإيجاد راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة $z = 0$ التي هي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية، ونستخدم الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب فنجد:

$$R(0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z^4+1)}{z^2(-az^2+(1+a^2)z\ -a)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+1}{-az^2+(1+a^2)z\ -a}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z^3(-az^2+(1+a^2)z\ -a)-(-2az+(1+a^2))(z^4+1)}{(-az^2+(1+a^2)z\ -a)^2}$$

$$=\frac{-(1+a^2)}{a^2}$$

لنوجد الراسب للدالة $f(z)$ في النقطة الشاذة المعزولة $z=a$.

إن النقطة $z=a$ هي عبارة عن قطب بسيط ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(a)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)(z^4+1)}{-az^2\left(z^2-\left(\frac{1+a^2}{a}\right)z\ +1\right)}=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)(z^4+1)}{-az^2\left(z-\frac{1}{a}\right)(z-a)}$$

$$\lim_{z\to a}\frac{(z^4+1)}{-az^2\left(z-\frac{1}{a}\right)}=\frac{a^4+1}{-a^3\left(a-\frac{1}{a}\right)}=\frac{a^4+1}{-a^3\left(\frac{a^2-1}{a}\right)}=\frac{-(a^4+1)}{a^2(a^2-1)}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_C\frac{z^4+1}{z^2(-az^2+(1+a^2)z\ -a)}dz=2\pi i.\left(-\frac{(1+a^2)}{a^2}-\frac{(a^4+1)}{a^2(a^2-1)}\right)$$

$$=2\pi i.\left(\frac{-(1+a^2)(a^2-1)-(a^4+1)}{a^2(a^2-1)}\right)$$

$$=2\pi i.\left(\frac{-(a^4-1)-(a^4+1)}{a^2(a^2-1)}\right)$$

$$=2\pi i.\left(\frac{-2a^4}{a^2(a^2-1)}\right)$$

$$=2\pi i.\left(\frac{-2a^2}{a^2-1}\right)=\frac{-4\pi a^2}{a^2-1}i$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^4+1}{z^2(-az^2+(1+a^2)z\ -a)}dz=\frac{1}{2i}.\left(\frac{-4\pi a^2}{a^2-1}i\right)$$

$$=\frac{-2\pi a^2}{a^2-1}=\frac{2\pi a^2}{1-a^2}$$

ومن ثمَّ حسب المبرهنة (١) وشروطها المحققة نجد أن:

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2a.\cos\theta+a^2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{1-2a.\cos\frac{\varphi}{2}+a^2}d\varphi=\frac{2\pi a^2}{1-a^2}$$

الحالة الثانية من تطبيقات مبرهنة الرواسب:

وهي حساب التكاملات الكسرية من الشكل:

$$\mathbf{I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx}$$

وبحيث إن $f(x)$ تابع كسري جبري عادي (نظامي) يكتب بالشكل $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ والتكامل I متقارب، وفي هذا النوع من التكاملات لا يمكننا تطبيق مبرهنة الرواسب مباشرة لكون المنحني غير محدود وغير مغلق، وبحالة خاصة فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{\infty}f(x)dx\ ;\ \text{زوجي } f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0\qquad ;\ \text{فردي } f(x)$$

علاوة على ذلك، إذا وجد التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ بالمعنى العادي فعندئذ تكون قيمته مساوية بالتأكيد لهذه النهاية، غير أنه قد يحصل أن توجد النهاية ولكن التكامل غير موجود، فندعو النهاية في هذه الحالة القيمة الرئيسية للتكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ حسب كوشي ونكتب:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx = p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

٢ . ٩ . ٢ . توطئة جوردان الأولى:

إذا كانت C دائرة أو قوس دائري نصف قطرها R ومركز هذه الدائرة a وكان:

$$\lim_{z\to\infty} \left|(z-a)f(z)\right| = 0 \quad ; \quad z = a + R\, e^{i\theta}$$

وكان $f(z)$ مستمراً على C عندئذ يكون:

$$\lim_{z\to\infty} \int_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_C iRe^{i\theta}.f\left(a + R.e^{i\theta}\right) d\theta = 0$$

وبحيث إن: $\quad dz = iRe^{i\theta}d\theta$

٢ . ٩ . ٣ . مبرهنة (٢):

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في النصف العلوي من المستوي العقدي $(\text{Img}z \geq 0)$ وبحيث $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ تابعاً كسرياً عادياً جبرياً باستثناء عدد محدود من الأقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي وإذا كانت :

$$\lim_{z\to\infty} z.f(z) = 0$$

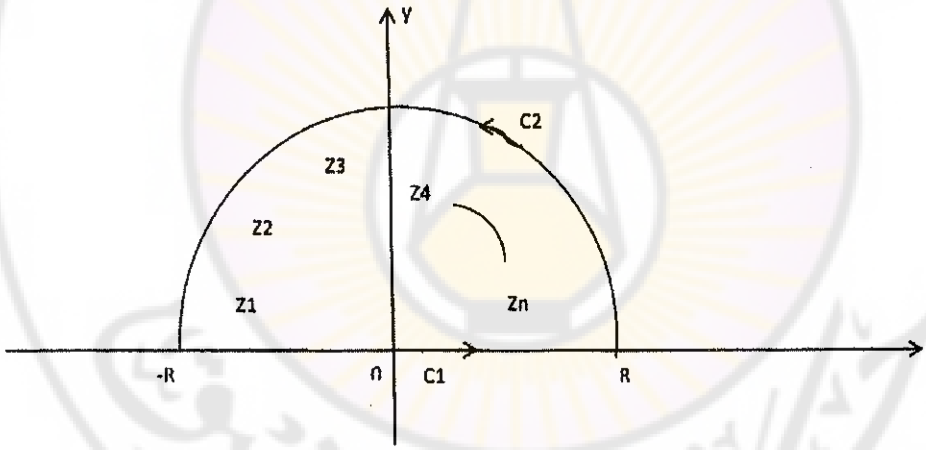
وذلك ضمن المجال $0 \leq \arg z = \theta \leq \pi$ عندئذٍ يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i.(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

وبحيث إن $R_1, R_2, \ldots R_n$ رواسب التابع العقدي $f(z)$ عند أقطابه $a_1, a_2, \ldots a_n$ والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

البرهان:

إن الدالة $f(z)$ هي الدالة التي نحصل عليها من الدالة $f(x)$ وذلك بتبديل x بالمتحول العقدي z ولنفرض أن $C = C_1 + C_2$ المنحني الذي نقوم بالمكاملة عليه وجميع أقطاب الدالة$f(z)$ تقع داخله وبحيث إن C_1 هو القطعة المستقيمة المنطبقة على المحور الحقيقي الواصلة بين $R -$ و R أما C_2 هو نصف الدائرة العلوي التي مركزها الصفر ونصف قطرها R وذلك وفق الشكل التالي:



الشكل (٢)

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

وحسب مبرهنة الرواسب يكون:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

$$= \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

وبجعل R تسعى إلى اللانهاية نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

ولكن حسب الفرض لدينا:

$$\lim_{z\to\infty} z.f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta}.f(R.e^{i\theta}) = 0$$

ومن ثمّ من أجل قيم θ ضمن المجال$[0,\pi]$ يكون:

$$\left|Re^{i\theta}.f(R.e^{i\theta})\right| \le \varepsilon$$

حيث ε عدد موجب يسعى إلى الصفر عندما تسعى R إلى اللانهاية.

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\left|Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})\right|d\theta$$

$$\le \lim_{R\to\infty} \varepsilon\pi = 0 \quad ; R \to \infty; \ \ \varepsilon \to 0$$

ومن ثمّ فإن الحد الثاني من التكامل يكون معدوماً بحسب توطئة جوردان الأولى أي:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta = 0$$

ومن ثمّ نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

وهو المطلوب.

نتيجة هامة: إذا كان التابع $f(x)$ يحقق الشرطين التاليين:

١ . $f(x)$ تابع كسري درجة بسطهُ تقل عن درجة مقامهُ بدرجتين على الأقل.

٢ . المقام لا ينعدم (وذلك حتى لا يكون للتابع العقدي $f(z)$ أقطاب تقع على المحور الحقيقي) وبناءً على ذلك يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

٢ . ٩ . ٣ . ١ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

باستخدام مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

الحل:

إن التكامل المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{1}{x^2+1}$ تابع كسري جبري عادي والأكثر من ذلك درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بدرجتين والمقام لا ينعدم ومن ثمّ الشروط محققة والتكامل I هو عبارة عن تكامل من الحالة الثانية من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب ويكون بحسب المبرهنة المعطاة:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} i.\,Re^{i\theta}.\,f(Re^{i\theta})d\theta$$

$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

ولكن حسب توطئة جوردان الأولى إن الحد الثاني من الطرف الأيمن يكون معدوماً ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

إن الدالة المكاملة هي $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ الناتجة عن الدالة $f(x)$ بتبديل كل x بالمتحول العقدي z والنقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

وهما نقاط شاذة معزولة بالنسبة للدالة $f(z)$ والأكثر من ذلك:

$z = i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ وهي تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي

$z = -i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ ولكن لا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي فتهمل، ومن ذلك وحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.(R(i))$$

كون أن النقطة $z = i$ قطب بسيط فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(i) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

ومن ثمَّ ضمن تحقق شروط المبرهنة نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i.\left(\frac{-i}{2}\right) = \pi$$

مثال (٢):

احسب التكامل التالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}dx$$

الحل:

إن التكامل المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x^2+9)}$ تابع كسري جبري عادي درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بدرجتين على الأقل والمقام لا ينعدم ومن ثمَّ الشروط محققة والتكامل I هو عبارة عن تكامل من الحالة الثانية ويكون بحسب المبرهنة المعطاة:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

ولكن حسب توطئة جوردان الأولى إن الحد الثاني من الطرف الأيمن يكون معدوماً ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

إن الدالة المكاملة هي $f(z) = \frac{2z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}$ والنقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z^2+4)(z^2+9) = 0 \Rightarrow z = \pm 2i\,, z = \pm 3i$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة بالنسبة للدالة $f(z)$ والأكثر من ذلك:

$z = 2i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ وهي تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z = -2i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ ولكن لاتقع في النصف العلوي من المستوي العقدي (تهمل).

$z = 3i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ وهي تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z = -3i$ قطب بسيط للدالة $f(z)$ ولكن لاتقع في النصف العلوي من المستوي العقدي فتهمل، ومن ذلك وحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.\,(R(2i) + R(3i))$$

كون أن النقطة $z = 2i$ قطب بسيط فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)(2z+1)}{(z-2i)(z+2i)(z^2+9)} = \lim_{z\to 2i}\frac{(2z+1)}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{4i+1}{(4i)(5)} = \frac{4i+1}{20i} = \frac{4-i}{20} = \frac{1}{5} - \frac{1}{20}i$$

وكون أن النقطة $z = 3i$ قطب بسيط فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب أيضاً نجد أن:

$$R(3i) = \lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)(2z+1)}{(z-3i)(z+3i)(z^2+4)} = \lim_{z\to 3i}\frac{(2z+1)}{(z+3i)(z^2+4)} = \frac{6i+1}{(6i)(-5)} = -\frac{6i+1}{30i} = \frac{-6+i}{30} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{30}i$$

ومن ثمّ نجد وبناءً على تحقق شروط المبرهنة يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}i - \frac{1}{5} + \frac{1}{30}i\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-10}{600}i\right) = \frac{\pi}{30}$$

مثال (٣):

احسب التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

الحل:

إن التكامل المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ونلاحظ أن:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$$

وبالاستفادة من:

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) \Rightarrow \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^6 - 1}$$

فإن $f(x)$ يكتب بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^6 - 1}$$

وهو تابع كسري جبري عادي درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بدرجتين على الأقل ومن ثمَّ الشروط محققة والتكامل I هو عبارة عن تكامل من الحالة الثانية ويكون بحسب المبرهنة المعطاة:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

ولكن حسب توطئة جوردان الأولى إن التكامل الثاني يكون معدوماً ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

إن الدالة المكاملة هي $f(z) = \frac{z^2-1}{z^6-1}$ والنقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^6 - 1 = 0$$

لنوجد الجذور الستة للواحد وهذه الجذور تعطى بالعلاقة:

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{6} + i.\sin\frac{2\pi k}{6} = e^{\frac{2\pi k i}{6}} \quad ; \; k = 0,1,2,3,4,5$$
$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 1$$
$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$
$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
$$k = 3 \Rightarrow z_3 = \cos\pi + i.\sin\pi = -1$$
$$k = 4 \Rightarrow z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3} = e^{\frac{4\pi}{3}i}$$
$$k = 5 \Rightarrow z_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i.\sin\frac{5\pi}{3} = e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

وهي النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ أما:

$z_0 = 1$ هي عبارة عن قطب بسيط وهي تقع على المحور الحقيقي أي لا تحقق شروط المبرهنة فتهمل هذه النقطة.

$z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$ أيضاً هي قطب بسيط وتقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ قطب بسيط وتقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_3 = -1$ هي عبارة عن قطب بسيط وهي لا تقع على النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_4 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ قطب بسيط وهي لاتقع على النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_5 = e^{\frac{5\pi}{3}i}$ قطب بسيط وهي لاتقع على النصف العلوي من المستوي العقدي.

وبأخذ الأقطاب الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.\left(R\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) + R\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\right)$$

كون أن النقطة $z_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$ قطب بسيط فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{\left(z - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)(z^2-1)}{(z-1)(z+1)\left(z - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}$$

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z^2-1}{(z-1)(z+1)\left(z - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i} - 1}{\left(e^{\frac{\pi}{3}i} - 1\right)\left(e^{\frac{\pi}{3}i} + 1\right)\left(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)\left(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= \frac{\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}\right)(1)(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i)} = \frac{2}{(\sqrt{3}i - 1)(3 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{2}{(2\sqrt{3}i - 6)} = \frac{1}{\sqrt{3}i - 3} = \frac{-\sqrt{3}i - 3}{12}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$R\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{-\sqrt{3}i - 3}{12}$$

وكون أن النقطة $z_3 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ قطب بسيط فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = \lim_{z \to e^{\frac{2\pi}{3}i}} \frac{(z - e^{\frac{2\pi}{3}i})(z^2 - 1)}{(z-1)(z+1)\left(z - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}$$

$$= \lim_{z \to e^{\frac{2\pi}{3}i}} \frac{z^2 - 1}{(z-1)(z+1)\left(z - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)\left(z - e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{4\pi}{3}i} - 1}{\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} - 1\right)\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= \frac{\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}\right)(-1)(\sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{\frac{-3 - \sqrt{3}i}{2}}{\frac{(\sqrt{3}i - 3)(1 + \sqrt{3}i)(-1)(-\sqrt{3}i - 3)}{4}} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3}i - 6)(-\sqrt{3}i - 3)}$$

$$= \frac{-2}{-2\sqrt{3}i - 6} = \frac{1}{\sqrt{3}i + 3} = \frac{-\sqrt{3}i + 3}{12}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$R\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = \frac{-\sqrt{3}i + 3}{12}$$

ومنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{C} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{-\sqrt{3}i - 3}{12} + \frac{-\sqrt{3}i + 3}{12}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-\sqrt{3}i}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

ومن ثمَّ وحسب تحقق شروط المبرهنة يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

مثال (٤):

احسب التكامل التالي:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}dx$$

الحل:

إن التكامل المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ونلاحظ أن:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

هو تابع كسري جبري عادي درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بدرجتين على الأقل والمقام لا ينعدم ومن ثمَّ الشروط محققة والتكامل I هو عبارة عن تكامل من الحالة الثانية، ويكون بحسب المبرهنة المعطاة:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} i.Re^{i\theta}.f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

ولكن حسب توطئة جوردان الأولى فإن التكامل الثاني يكون معدوماً ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

إن الدالـة المكاملـة هـي $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ والنقـاط الشـاذة للدالـة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z^2+1)^2(z^2+2z+2) = 0 \Rightarrow$$
$$(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z^2+1 = 0 \Rightarrow z_1 = i\,, z_2 = -i$$

أو $z^2 + 2z + 2 = 0$ وعن طريق المميز نجد أن:

$$\Delta = 4 - 4(2)(1) = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$$

ومن ثمَّ:

$$z_3 = \frac{2i-2}{2} = i - 1\,, z_4 = \frac{-2i-2}{2} = -i - 1$$

وهي النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ أما:

$z_1 = i$ فهي عبارة عن قطب مضاعف، وهي تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_2 = -i$ أيضاً هي قطب مضاعف ولا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_3 = i - 1$ قطب بسيط وتقع في النصف العلوي من المستوي العقدي.

$z_3 = -i - 1$ هي عبارة عن قطب بسيط وهي لا تقع إلى النصف العلوي من المستوي العقدي.

وبأخذ الأقطاب الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.\,(R(i) + R(i-1))$$

كون أن النقطة $z_1 = i$ قطب مضاعف فحسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right]$$

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{2z(z+i)^2(z^2+2z+2) - z^2[2(z+i)(z^2+2z+2) + (z+i)^2(2z+2)]}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2}\right]$$

$$= \frac{2(i)(2i)^2(-1+2i+2) - (i)^2[2(2i)(-1+2(i)+2) + (2i)^2(2i+2)]}{(2i)^4(-1+2i+2)^2}$$

$$= \frac{(-8i)(1+2i) + [4i(1+2i) - 4(2i+2)]}{16(1+2i)^2}$$

$$= \frac{-8i+16+4i-8-8i-8}{16(4i-3)} = \frac{-12i}{16(4i-3)}$$

$$= \frac{-3i}{4(4i-3)} = \frac{-3i(-4i-3)}{4(25)} = \frac{-12+9i}{100}$$

ومن ثمّ نجد أن:

$$R(i) = \frac{-12+9i}{100}$$

وكون أن النقطة $z_3 = i - 1$ قطب بسيط فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(i-1) = \lim_{z \to i-1} \frac{(z-(i-1))z^2}{(z^2+1)^2\big(z-(i-1)\big)(z+(i+1))}$$

$$\lim_{z \to i-1} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+(i+1))} = \frac{(i-1)^2}{(1-2i)^2.(2i)} = \frac{-1}{(1-2i)^2}$$

$$= \frac{-1}{-3-4i} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25}$$

ومن ثمّ نجد أن:

$$R(i-1) = \frac{3-4i}{25}$$

ومنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_C f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{-12+9i}{100} + \frac{3-4i}{25}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-12+9i+12-16i}{100}\right) = 2\pi i\left(\frac{-7i}{100}\right) = \frac{7\pi}{50}$$

ومن ثمّ حسب المبرهنة وتحقق شروطها يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx = \frac{7\pi}{50}$$

الحالة الثالثة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب: وهي حساب التكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e^{imx}.f(x)\,dx}$$

وبحيث إن $m > 0$ عدد موجب وأن $f(x)$ تابع كسري جبري عادي يكتب بالشكل:

$$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$$

إن التكامل السابق يمثل تحويل فورييه للتابع $f(x)$.

٢ . ٩ . ٤ . توطئة جوردان الثانية:

إذا كانت C نصف دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها R وإذا حقق التابع $f(z)$ الشرطين التاليين:

١ . $f(z)$ تابع تحليلي في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد محدود من النقاط الشاذة المعزولة.

٢ . $f(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$ يسعى بانتظام إلى الصفر وذلك من أجل جميع قيم الزاوية $0 \leq \arg z = \theta \leq \pi$ وكان $m > 0$. عندئذٍ يكون:

$$\lim_{R \to \infty} = \int_C e^{imz} . f(z) dz = 0$$

البرهان:

إن الشرط الثاني من الفرض يحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \quad \text{كبيرة بقدر كافي}$$

بحيث يكون:

$$|f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{وبحيث أن} \quad z \in C \quad \dots(1)$$

هذا من جهة، ومن جهة أُخرى لنشكل المقدار e^{imz} مع العلم أن:

$$z = Re^{i\theta} \quad ; \quad 0 \leq \arg z = \theta \leq \pi$$

$$e^{imz} = e^{im(R.e^{i\theta})} = e^{imR[\cos\theta + i.\sin\theta]} = e^{imR.\cos\theta - mR.\sin\theta}$$
$$= e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta} \quad \Rightarrow$$
$$e^{imz} = e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta}$$

وبضرب طرفي العلاقة السابقة بالتابع $f(z)$ نجد:

$$f(z).e^{imz} = f(z).e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta}$$

وبأخذ التكامل $\int_C$ للطرفين نجد:

$$\int_C f(z).e^{imz}dz = \int_C f(z).e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta}\,dz$$

$$\int_C f(z).e^{imz}dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}).(e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta}).(iRe^{i\theta})d\theta$$

وبأخذ الطويلة للعلاقة الأخيرة نجد أن:

$$\left|\int_C f(z).e^{imz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}).(e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta}).(iRe^{i\theta})d\theta\right| \leq$$

$$\int_0^{\pi} \left|f(Re^{i\theta}).(e^{-mR.\sin\theta}.e^{imR.\cos\theta}).(iRe^{i\theta})\right|d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} \left|f(Re^{i\theta})\right|.\left|e^{-mR.\sin\theta}\right|.\left|e^{imR.\cos\theta}\right|.\left|iRe^{i\theta}\right|d\theta =$$

$$R\int_0^{\pi} e^{-mR.\sin\theta}.\left|f(Re^{i\theta})\right|d\theta \Rightarrow (1)\text{بحسب} \leq R.\varepsilon\int_0^{\pi} e^{-mR.\sin\theta}d\theta$$

وبالاستفادة من متراجحة جوردان التي تعطى بالعلاقة:

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta \leq \theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

نجد أن:

$$R\int_{0}^{\pi} e^{-m.R.\sin\theta}.\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|d\theta \leq R.\varepsilon\int_{0}^{\pi} e^{-m.R.\sin\theta}d\theta$$

$$\leq 2R.\varepsilon\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2mR\theta}{\pi}}d\theta = 2R.\varepsilon\left[\frac{1}{\frac{-2mR}{\pi}}.e^{\frac{-2mR\theta}{\pi}}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2R.\varepsilon\left[-\frac{\pi}{2mR}.e^{\frac{-2m.R\theta}{\pi}}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi.\varepsilon}{m}\left[1 - e^{-Rm}\right]$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\left|\int_{C} f(z).e^{imz}dz\right| \leq \frac{\pi.\varepsilon}{m}\left[1 - e^{-Rm}\right]$$

وبأخذ النهاية للعلاقة الأخيرة عندما R تسعى لللانهاية نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C} f(z).e^{imz}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{\pi.\varepsilon}{m}\left[1 - e^{-Rm}\right]$$

وكون أن $m > 0$ حسب الفرض ومن ثمَّ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\pi.\varepsilon}{m}\left[1 - e^{-Rm}\right] = 0$$

ومنه

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C} f(z).e^{imz}dz\right| = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{C} f(z).e^{imz}dz = 0$$

وهو المطلوب.

٢ . ٩ . ٥ . مبرهنة (٣):

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد محدود من الأقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي وإذا كان $m > 0$ وكانت:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

وذلك من أجل جميع قيم θ المنتمية إلى المجال $[0, \pi]$

عندئذٍ فإن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx . f(x) dx$$

هو عبارة عن القسم الحقيقي لناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $e^{imz}. f(z)$ عند أقطابها الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx . f(x) dx = \operatorname{Re}(2\pi i[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

بينما التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx . f(x) dx$$

هو عبارة عن القسم التخيلي لناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $e^{imz}. f(z)$ عند أقطابها الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx . f(x) dx = \operatorname{Img}(2\pi i[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

وبعبارةٍ أخرى:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}.f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos mx + i.\sin mx].f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx.f(x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx.f(x)dx$$

$$= 2\pi i.[R_1 + R_2 + \cdots R_n]$$

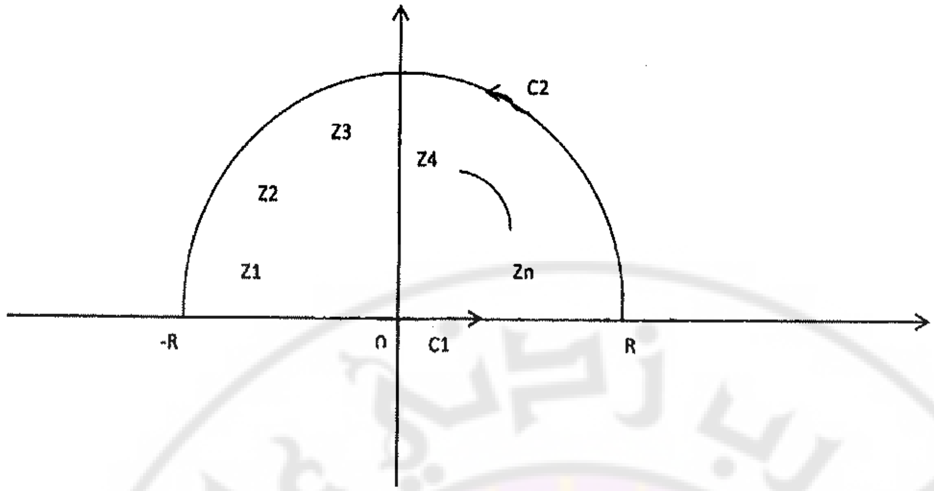
بمقارنة القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي نحصل على القيمة الرئيسية لكل من التكاملين المطلوبين، فإذا كان التكاملان موجودين وفق المعنى المعتاد تكون هاتان القيمتان الرئيسيتان مساويتين لقيمتيهما، أي إن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx.f(x)dx = \mathrm{Re}(2\pi i[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx.f(x)dx = \mathrm{Img}(2\pi i[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

البرهان:

إن الدالة $f(z)$ هي الدالة التي نحصل عليها من الدالة $f(x)$ وذلك بتبديل x بالمتحول العقدي z ولنفرض أن $C = C_1 + C_2$ (طريق المكاملة) المنحني الذي نقوم بالمكاملة عليه وجميع أقطاب الدالة $f(z)$ تقع داخله وبحيث إن C_1 هو القطعة المستقيمة المنطبقة على المحور الحقيقي والواصلة بين $-R$ و R أما C_2 هو نصف الدائرة العلوي التي مركزها الصفر ونصف قطرها R وذلك وفق الشكل التالي:



الشكل (٣)

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_{C} e^{imz}.f(z)dz = \int_{C_1} e^{imz}.f(z)dz + \int_{C_2} e^{imz}.f(z)dz$$

وحسب مبرهنة الرواسب يكون:

$$\int_{C} e^{imz}.f(z)dz = \int_{C_1} e^{imz}.f(z)dz + \int_{C_2} e^{imz}.f(z)dz$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

$$\Rightarrow \int_{C} e^{imz}.f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{imx}.f(x)dx$$
$$+ \int_{0}^{\pi} (i.Re^{i\theta}).(e^{im.(Re^{im\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

وبجعل R تسعى إلى اللانهاية نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}.f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{im.(Re^{im\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

ولكن حسب توطئة جوردان الثانية يكون الحد الثاني من التكامل معدوماً أي:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{im.(Re^{im\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta = 0$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

أي إن:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos mx.f(x)dx = Re(2\pi i[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$
$$B = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin mx.f(x)dx = Img(2\pi i[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

وهو المطلوب.

نتيجة هامة: إذا حقق التابع $f(x)$ الكسري الشرطين التاليين:

درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجة واحدة على الأقل بحيث يتحقق

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

وكذلك المقام في التابع الكسري $f(x)$ لا ينعدم كي لا يوجد للتابع العقدي $e^{imz}f(z)$ أقطاب تقع على المحور الحقيقي عندئذٍ نحصل على التكاملين A و B.

٢ . ٩ . ٥ . ١ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

باستخدام مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$$

الحل:

إن التكامل I المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx . f(x) dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ تابع كسري جبري عادي، ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه (بأربع درجات) أي بدرجة على الأقل حسب النتيجة أي الدالة $f(x)$ تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

والأكثر من ذلك مقامه لا ينعدم، وكما نلاحظ $m = 1 > 0$ ومن ثمّ التابع $f(x)$ يحقق الشروط والتكامل السابق هو تكامل من الحالة الثالثة من تطبيقات مبرهنة الرواسب، أما قيمته بحسب مبرهنة معطاة فتعطى بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \mathrm{Re}(2\pi i . [R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

وحيث $R_1 , R_2 , \ldots, R_n$ هي رواسب الدالة $F(z) = e^{iz} . f(z)$ عند اقطابها والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي لا تقع على المحور الحقيقي بحسب المبرهنة.

ويكون:

$$\int_C F(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} . f(x) dx + \lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi} (i . Re^{i\theta}) . (e^{i.(Re^{i\theta})} f(Re^{i\theta}) d\theta$$
$$= 2\pi i (R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

حيث C هو طريق المكاملة المعروف في المبرهنة (٣).

ولكن حسب توطئة جوردان الثانية يكون الحد الثاني من التكامل معدوماً أي:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{i.(Re^{i\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta=0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C F(z)dz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix}.f(x)dx=2\pi i(R_1+R_2+\cdots R_n)\Rightarrow$$

$$\int_C\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix}.f(x)dx=2\pi i(R_1+R_2+\cdots R_n)$$

مهمتنا الأن حساب التكامل $\int_C\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$ ومن ثم نأخذ القسم الحقيقي لهذا التكامل لنحصل عل قيمة التكامل I المعطى بالفرض.

إن الدالة المكاملة $F(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ والنقاط الشاذاة للدالة $F(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z^2+1)^2=0\Rightarrow z^2+1=0\Rightarrow z=\pm i$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة وهي عبارة عن أقطاب مضاعفة للتابع $F(z)$ والنقطة $z=i$ تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي. أما النقطة $z=-i$ لا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz=2\pi i.(R(i))$$

كون أن النقطة $z=i$ هي عبارة عن قطب مضاعف فإن راسب الدالة $F(z)$ في هذه النقطة يعطى حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب بالعلاقة:

$$R(i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{(z\ +i)^2}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i).e^{iz}}{(z\ +i)^4}\right]$$
$$= \frac{i.e^{-1}(-4) - 2(2i)e^{-1}}{16} = \frac{-8}{16.e}i = \frac{-1}{2e}i$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i.\left(\frac{-1}{2e}i\right) = \frac{\pi}{e}$$

إن التكامل I المعطى هو عبارة عن القسم الحقيقي لناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $F(z)$ ومن ثمَّ هو عبارة عن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx = Re\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = Re\left(\frac{\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

وهو المطلوب.

فائدة: يمكن من المثال السابق أن نستنتج فوراً قيمة التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}dx = Img\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = Img(2\pi i.R(i))$$
$$= Img\left(\frac{\pi}{e}\right) = 0$$

مثال (٢):

احسب قيمة التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{x^2-2x+2}dx$$

الحل:

إن التكامل I المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{x^2-2x+2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx.f(x)dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{(x-1)}{x^2-2x+2}$ تابع كسري جبري عادي ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه بدرجة واحدة أي الدالة $f(x)$ تحقق الشرط

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

والأكثر من ذلك مقامه لا ينعدم، وكما نلاحظ $m = 1 > 0$ ومن ثمَّ التابع $f(x)$ يحقق الشروط والتكامل السابق هو تكامل من الحالة الثالثة أما قيمته بحسب المبرهنة معطاة فتعطى بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{x^2-2x+2}dx = \mathrm{Img}(2\pi i.[R_1+R_2+\cdots R_n])$$

وحيث $R_1, R_2, ..., R_n$ هي رواسب الدالة $F(z) = e^{iz}.f(z)$ عند أقطابها والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي لا تقع على المحور الحقيقي بحسب المبرهنة.

ويكون:

$$\int_C F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}.f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} (i.Re^{i\theta}).(e^{i.(Re^{i\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1+R_2+\cdots R_n)$$

حيث C هو طريق المكاملة المعروف في المبرهنة.

ولكن حسب توطئة جوردان الثانية يكون الحد الثاني من التكامل معدوماً.

ومن ثمَّ:

$$\int_C F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}.f(x)dx = 2\pi i(R_1+R_2+\cdots R_n) \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

مهمتنا الآن حساب التكامل $\int_C \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}dz$ ومن ثم نأخذ القسم التخيلي لهذا التكامل لنحصل على قيمة التكامل I المعطى بالفرض.

إن الدالة المكاملة $F(z) = \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$ والنقاط الشاذة للدالة $F(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow \text{عن طريق المميز}$$

$$\Delta = (4) - 4(2) = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$$

ومن ثمَّ تكون النقاط الشاذة للدالة $F(z)$ هي:

$$z_1 = \frac{2i+2}{2} = 1+i \quad , \quad z_2 = \frac{-2i+2}{2} = 1-i$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة وهي عبارة عن أقطاب بسيطة للتابع $F(z)$ والنقطة $z_1 = 1+i$ تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي أما النقطة $z_2 = 1-i$ فلا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}dz = 2\pi i.(R(1+i))$$

كون أن النقطة $z_1 = 1+i$ هي عبارة عن قطب بسيط ونلاحظ أن الدالة $F(z)$ تكتب بالشكل:

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\frac{(z-1)e^{iz}}{z-(1-i)}}{z-(i+1)}$$

والأكثر من ذلك $\psi'(1+i) = 1 \neq 0$ وبالتالي حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(1+i) = \frac{\varphi(1+i)}{\psi'(1+i)} = \frac{(i)e^{i(1+i)}}{2i} = \frac{1}{2}.e^{-1}[\cos 1 + i.\sin 1]$$

$$= \frac{\cos 1}{2e} + \frac{\sin 1}{2e} i$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2} dz = = 2\pi i.\left(\frac{\cos 1}{2e} + \frac{\sin 1}{2e} i\right)$$

$$= \frac{\pi\cos 1}{e} i - \frac{\pi \sin 1}{e}$$

إن التكامل I المعطى هو عبارة عن القسم التخيلي لناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $F(z)$ ومن ثمَّ هو عبارة عن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{x^2-2x+2} dx = \operatorname{Img} \int_C \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2} dz$$

$$= \operatorname{Img}\left(\frac{\pi\cos 1}{e} i - \frac{\pi\sin 1}{e}\right) = \frac{\pi\cos 1}{e}$$

وهو المطلوب.

فائدة: يمكن من المثال السابق أن نستنتج فوراً قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+2} dx = \operatorname{Re} \int_C \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2} dz = \operatorname{Re}(2\pi i. R(1+i))$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\pi\cos 1}{e} i - \frac{\pi\sin 1}{e}\right) = -\frac{\pi\sin 1}{e}$$

مثال (٣):

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 1} dx$$

الحل: إن التكامل I المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx . f(x) dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ تابع كسري جبري عادي ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه (بدرجتين) أي الدالة $f(x)$ تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

والأكثر من ذلك مقامه لا ينعدم، كما نلاحظ $m = 3 > 0$ ومن ثمّ التابع $f(x)$ يحقق الشروط والتكامل السابق هو تكامل من الحالة الثالثة من تطبيقات مبرهنة الرواسب أما قيمته فتعطى بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Img}(2\pi i . [R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

وحيث $R_1, R_2, \dots, R_n$ هي رواسب الدالة $F(z) = e^{i3z} . f(z)$ عند اقطابها والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي لا تقع على المحور الحقيقي بحسب المبرهنة.

ويكون:

$$\int_C F(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i3x} . f(x) dx + \lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi} (i . Re^{i\theta}) . (e^{i3.(Re^{i\theta})} f(Re^{i\theta}) d\theta$$
$$= 2\pi i (R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

حيث C هو طريق المكاملة المعروف في المبرهنة.

ولكن حسب توطئة جوردان الثانية يكون الحد الثاني من التكامل معدوماً أي:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{i3.(Re^{i\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta = 0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_{C} F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i3x}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n) \Rightarrow$$

$$\int_{C} \frac{e^{3zi}}{z^2+1}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i3x}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

مهمتنا الآن حساب التكامل $\int_C \frac{e^{3zi}}{z^2+1}dz$ ومن ثم نأخذ القسم التخيلي لهذا التكامل لنحصل عل قيمة التكامل I المعطى.

إن الدالة المكاملة $F(z) = \frac{e^{3zi}}{z^2+1}$ والنقاط الشاذاة للدالة $F(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة وهي عبارة عن أقطاب بسيطة للتابع $F(z)$ والنقطة $z = i$ تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي. أما النقطة $z = -i$ فلا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C} \frac{e^{3zi}}{z^2+1}dz = 2\pi i.(R(i))$$

كون ان النقطة $z = i$ هي عبارة عن قطب بسيط فإن راسب الدالة $F(z)$ في هذه النقطة يعطى حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب بالعلاقة:

$$R(i) = \lim_{z\to i}\left[\frac{e^{3zi}}{z+i}\right] = \frac{e^{-3}}{2i} = \frac{-1}{2e^3}i$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C \frac{e^{i3z}}{z^2+1}dz = 2\pi i.\left(\frac{-1}{2e^3}i\right) = \frac{\pi}{e^3}$$

إن التكامل I المعطى هو عبارة عن القسم التخيلي لناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $F(z)$ ومن ثمَّ هو عبارة عن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2+1}dx = \mathrm{Img}\int_C \frac{e^{i3z}}{z^2+1}dz = \mathrm{Img}\left(\frac{\pi}{e^3}\right) = 0$$

وهو المطلوب.

فائدة: يمكن من المثال السابق أن نستنتج فوراً قيمة التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1}dx = \mathrm{Re}\int_C \frac{e^{3zi}}{(z^2+1)^2}dz = \mathrm{Re}(2\pi i.R(i)) = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{e^3}\right) = \frac{\pi}{e^3}$$

ملاحظة: بالانتباه إلى أن الدالة التي نقوم بمكاملتها هي عبارة عن دالة فردية ومن ثمَّ يمكن الحكم على التكامل I بأنه ذات قيمة معدومة.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2+1}dx = 0$$

مثال (٤):

احسب قيمة كل من التكاملين التاليين:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx \quad , \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx$$

باستخدام مبرهنة الرواسب.

الحل:

إن التكامل I المعطى هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx.f(x)dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}$ تابع كسري جبري عادي ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه بدرجة واحدة أي الدالة $f(x)$ تحقق الشرط:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

والأكثر من ذلك مقامه لا ينعدم، وكما نلاحظ $m = \pi > 0$ ومن ثمَّ التابع $f(x)$ يحقق الشروط والتكامل السابق هو تكامل من الحالة الثالثة أما قيمته بحسب المبرهنة فتعطى بالعلاقة:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Img}(2\pi i.[R_1+R_2+\cdots R_n])$$

وحيث $R_1, R_2, \ldots, R_n$ هي رواسب الدالة $F(z) = e^{\pi zi}.f(z)$ عند اقطابها والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي لا تقع على المحور الحقيقي بحسب المبرهنة، وواضح أن التكامل J يحقق نفس الشروط أيضاً إلا أن قيمته تعطى بحسب المبرهنة بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Re}(2\pi i.[R_1+R_2+\cdots R_n])$$

ويكون:

$$\int_C F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi x}.f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{i\pi.(e^{Ri\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1+R_2+\cdots R_n)$$

حيث C هو طريق المكاملة المعروف في المبرهنة.

ولكن حسب توطئة جوردان الثانية يكون الحد الثاني من التكامل معدوماً.

ومن ثمَّ:

$$\int_C F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi x}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n) \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2+2z+5}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi x}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

مهمتنا الآن حساب التكامل $\int_C \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2+2z+5}dz$ ومن ثم نأخذ القسم التخيلي لهذا التكامل لنحصل على قيمة التكامل I المعطى بالفرض ونأخذ القسم الحقيقي للتكامل أيضاً لنحصل على قيمة التكامل J المعطى بالفرض أيضاً.

إن الدالة المكاملة $F(z) = \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2+2z+5}$ والنقاط الشاذة للدالة $F(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow \text{عن طريق المميز}$$

$$\Delta = (4) - 4(5) = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$$

ومن ثمَّ تكون النقاط الشاذة للدالة $F(z)$ هي:

$$z_1 = \frac{4i-2}{2} = -1+2i \quad , \quad z_2 = \frac{-4i-2}{2} = -1-2i$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة وهي عبارة عن أقطاب بسيطة للتابع $F(z)$ والنقطة $z_1 = -1+2i$ تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي أما النقطة $z_2 = -1-2i$ فلا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2+2z+5}dz = 2\pi i.(R(-1+2i))$$

كون أن النقطة $z_1 = -1 + 2i$ هي عبارة عن قطب بسيط، ونلاحظ أن الدالة $F(z)$ تكتب بالشكل:

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\dfrac{ze^{\pi zi}}{z + (1 + 2i)}}{z - (2i - 1)}$$

والأكثر من ذلك $\psi'(2i - 1) = 1 \neq 0$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(2i - 1) = \frac{\varphi(2i - 1)}{\psi'(2i - 1)} = \frac{(2i - 1)e^{i\pi(2i-1)}}{4i} = \frac{-i}{4}.(2i - 1)e^{-2\pi}.e^{-i\pi}$$

$$= \frac{-i}{4e^{2\pi}}.(2i - 1).(-1) = \frac{i}{4e^{2\pi}}.(2i - 1) = -\frac{1}{2e^{2\pi}} - \frac{1}{4e^{2\pi}}i$$

وبالتالي:

$$\int_C \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2 + 2z + 5}dz = 2\pi i.\left(-\frac{1}{2e^{2\pi}} - \frac{1}{4e^{2\pi}}i\right) = \frac{-\pi}{e^{2\pi}}i + \frac{\pi}{2e^{2\pi}}$$

إن التكامل I المعطى هو عبارة عن القسم التخيلي لمضروب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $F(z)$ ومن ثمَّ هو عبارة عن:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z.\sin\pi x}{z^2 + 2z + 5}dx = \operatorname{Img} \int_C \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2 + 2z + 5}dz$$

$$= \operatorname{Img}\left(\frac{-\pi}{e^{2\pi}}i + \frac{\pi}{2e^{2\pi}}\right) = \frac{-\pi}{e^{2\pi}}$$

إن التكامل J المعطى هو عبارة عن القسم الحقيقي لمضروب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $F(z)$ ومن ثمَّ هو عبارة عن:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z.\cos\pi x}{z^2 + 2z + 5}dx = \operatorname{Re} \int_C \frac{z.e^{\pi zi}}{z^2 + 2z + 5}dz$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{-\pi}{e^{2\pi}}i + \frac{\pi}{2e^{2\pi}}\right) = \frac{\pi}{2e^{2\pi}}$$

مثال (٥):

احسب التكامل التالي:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} \quad ; \quad a, m > 0$$

ثم استنتج قيمة التكامل:

$$J = \int_{0}^{+\infty} \frac{x.\cos mx}{x^2 + a^2}$$

الحل:

نلاحظ أن الدالة $f(x)$ هي دالة فردية والدالة $\sin mx$ كما نعلم أيضاً دالة فردية وجداء دالتين فرديتين هو دالة زوجية ومن ثمَّ فإن:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} \ldots (*)$$

إن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} dx$$

هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx . f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ تابع كسري جبري عادي ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه (بدرجة واحدة) أي الدالة $f(x)$ تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

والأكثر من ذلك مقامه لا ينعدم، وكما نلاحظ $m > 0$ حسب الفرض ومن ثمَّ التابع $f(x)$ يحقق الشروط والتكامل السابق هو تكامل من الحالة الثالثة من تطبيقات مبرهنة الرواسب أما قيمته فتعطى بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} dx = \mathrm{Img}(2\pi i.[R_1 + R_2 + \cdots R_n])$$

وحيث $R_1, R_2, ..., R_n$ هي رواسب الدالة $F(z) = e^{miz}.f(z)$ عند اقطابها والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي لا تقع على المحور الحقيقي بحسب المبرهنة. ويكون:

$$\int_C F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}.f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{im.(Re^{im\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta$$
$$= 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

حيث C هو طريق المكاملة المعروف في المبرهنة.

ولكن حسب توطئة جوردان الثانية يكون الحد الثاني من التكامل معدوماً أي:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}(i.Re^{i\theta}).(e^{im.(Re^{im\theta})}f(Re^{i\theta})d\theta = 0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C F(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n) \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{ze^{mzi}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}.f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$$

مهمتنا الأن حساب التكامل $\int_C \frac{ze^{mzi}}{z^2+a^2} dz$ ومن ثم نأخذ القسم التخيلي لهذا التكامل لنحصل عل قيمة التكامل I المعطى.

إن الدالة المكاملة $F(z) = \frac{ze^{mzi}}{z^2+a^2}$ والنقاط الشاذة للدالة $F(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + a^2 = 0 \Rightarrow z = \pm ai$$

وهي عبارة عن نقاط شاذة معزولة وهي عبارة عن أقطاب بسيطة للتابع $F(z)$ والنقطة $z = ai$ وكون أنه حسب الفرض $a > 0$ ومن ثمَّ تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي أما النقطة $z = -ai$ فلا تقع في النصف العلوي من المستوي العقدي ومن ثمَّ حسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C \frac{ze^{mzi}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i.(R(ai))$$

كون أن النقطة $z = ai$ هي عبارة عن قطب بسيط فإن راسب الدالة $F(z)$ في هذه النقطة يعطى حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب بالعلاقة:

$$R(ai) = \lim_{z \to ai} \left[\frac{ze^{mzi}}{z + ai}\right] = \frac{(ai)e^{-ma}}{2ai} = \frac{1}{2ae^{ma}}$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C \frac{e^{mzi}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i.\left(\frac{1}{2ae^{ma}}\right) = \frac{\pi}{ae^{ma}} i$$

إن التكامل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} dx$$

هو عبارة عن القسم التخيلي لناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب الدالة $F(z)$ ومن ثمَّ هو عبارة عن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} dx = \mathrm{Img} \int_C \frac{z.e^{mzi}}{z^2 + a^2} dz = \mathrm{Img}\left(\frac{\pi}{ae^{ma}} i\right) = \frac{\pi}{ae^{ma}}$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن قيمة التكامل I هي عبارة عن:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\sin mx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^{ma}}$$

وهو المطلوب.

- واضح أنه بالنسبة للتكامل J فإن قيمة التكامل تكون معدومة.

الحالة الرابعة من تطبيقات مبرهنة الرواسب:

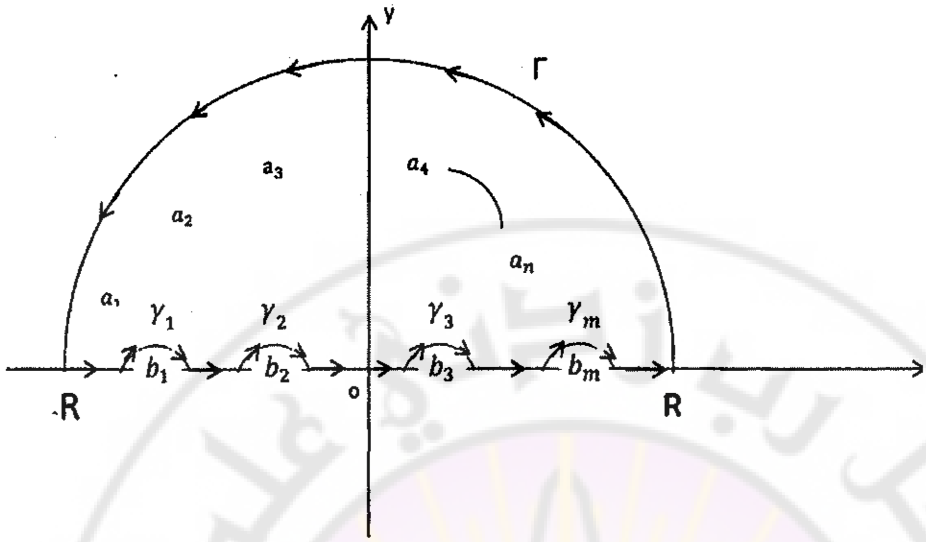
وهي حالة وجود أقطاب بسيطة واقعة على المحور الحقيقي للدالة $f(z)$ الواردة في الحالتين الثانية والثالثة من تطبيقات مبرهنة الرواسب التي تم دراستها سابقاً.

٢ . ٩ . ٦ . مبرهنة (٤):

إذا وجدت للدالة $f(z)$ الواردة في الحالتين الثانية والثالثة أقطاب $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ واقعة فوق المحور الحقيقي وكذلك أقطاب بسيطة $b_1, b_2, b_3, \dots b_m$ تقع على المحور الحقيقي فإننا نضع داخل المنحني C أنصاف دوائر(نصف دائرة) وهذه الأنصاف هي:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_m$$

بحيث نتجنب الأقطاب الواقعة على المحور الحقيقي، وذلك وفق الشكل التالي (الشكل (٤)):



الشكل (٤)

وبجعل أنصاف أقطار أنصاف الدوائر:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots \gamma_m$$

تسعى إلى الصفر, وبجعل R تسعى إلى اللانهاية وإذا كان التابع $f(x)$ تابعاً كسرياً تقل درجة بسطه عن درجة مقامه بدرجتين على الأقل عندئذٍ يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots R_n) + \pi i(R'_1 + R'_2 + R'_3 + \cdots R'_m)$$

حيث إن $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ رواسب الدالة $f(z)$ عند أقطابها العلوية بينما $R'_1, R'_2, R'_3, \ldots R'_m$ هي رواسب التابع العقدي $f(z)$ عند أقطابها الواقعة على المحور الحقيقي.

كذلك إذا كان التابع $f(x)$ تابعاً كسرياً درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بدرجة واحدة على الأقل عندئذٍ يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos mx dx = \mathrm{Re}[2\pi i(R_1 + R_2 + R_3 + .. + R_n)$$

$$+\pi i(R'_1+R'_2+R'_3+..+R'_m)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \sin mx dx = \mathrm{Im}[2\pi i(R_1+R_2+R_3+..+R_n)$$
$$+\pi i(R'_1+R'_2+R'_3+..+R'_m)]$$

حيث إن: $R_1, R_2, R_3, ...R_n$ رواسب الدالة $f(z).e^{imz}$ عند أقطابها العلوية بينما $R'_1, R'_2, R'_3, ...R'_m$ هي رواسب التابع العقدي $f(z).e^{imz}$ عند أقطابها الواقعة على المحور الحقيقي.

٢ . ٩ . ٧ . التوطئة الثالثة:

نص التوطئة: إذا كانت γ قوس من دائرة مركزها $z = a$ ونصف قطرها r، وهذا القوس يقابل زاوية قياسها θ وكان للتابع $f(z)$ قطباً بسيطاً في الموضع $z = a$ عندئذٍ يكون:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f(z).e^{imz}dz = i.a_{-1}.\theta \quad ; \quad m \ge 0$$

وحيث a_{-1} هو راسب التابع $f(z).e^{imz}$ في النقطة $z = a$.

الشكل (٥)

(تقبل دون برهان).

ملاحظة هامة:

في الحالة التي يكون فيها التابع $f(z)$ يعاني انقطاعاً على المحور الحقيقي في عدد منتهٍ من المواضع تقع بين a و b، عندئذ نقول إن التكامل في هذه الحالة تكامل معتل.

٢ . ٩ . ٨ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

احسب قيمة التكامل المعتل الآتي:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

الحل:

نعلم أن التابع $g(x) = \sin x$ هو تابع فردي والتابع $h(x) = \frac{1}{x}$ هو أيضاً تابع فردي، وجداء تابعين فرديين هو تابع زوجي ومن ثمَّ $g(x).h(x) = \frac{\sin x}{x}$ هو تابع زوجي (إن الترميز للتوابع السابقة للتوضيح فقط).

ومن ثمَّ الدالة المراد مكاملتها هي دالة زوجية والتكامل I السابق يكتب بالشكل:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

إن التكامل المعتل التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

هو تكامل من الشكل:

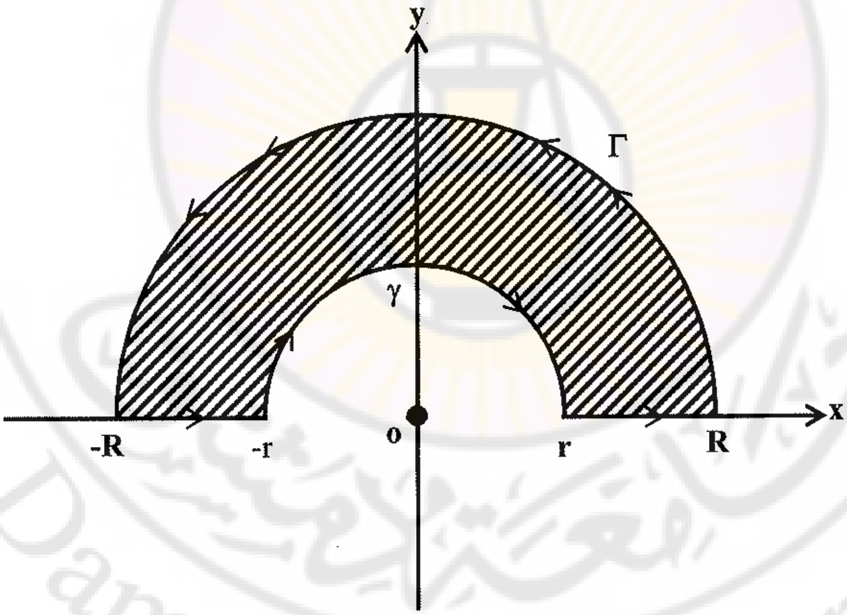
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\sin mx \, dx$$

ونلاحظ أن التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع كسري ودرجة البسط تقل عن درجة المقام بدرجة واحدة، ونلاحظ أيضاً أن $m = 1 > 0$ إلا أن المقام ينعدم ويوجد أقطاب للدالة $F(z) = f(z).e^{iz}$ تقع على المحور الحقيقي ومن ثمَّ التكامل السابق هو تكامل من الحالة الرابعة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لدينا: $$F(z) = f(z).e^{iz} = \frac{e^{iz}}{z}$$

وأقطاب هذه الدالة هي $z = 0$ وهي عبارة عن قطب بسيط وتقع على المحور الحقيقي.

حسب المبرهنة الخاصة بالحالة الرابعة نضع داخل المنحني C نصف دائرة γ مركزها $z = 0$ ونصف قطرها r وبحيث نتجنب القطب $z = 0$ البسيط الواقع على المحور الحقيقي أي قمنا بعزل النقطة $z = 0$ وفق الشكل التالي (شكل (٦)):



الشكل (٦)

فنلاحظ أنه يصبح لدينا:

$$\int_C F(z)\,dz = \int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

وذلك مع الانتباه إلى أن التابع e^{iz} تحليلي، ولا يملك أقطاباً في نصف المستوي العلوي، وبناءً على ذلك يكون التابع $F(z)$ تحليلياً داخل وعلى C ويكون:

$$\int_C F(z)dz = 0 \Rightarrow \int_C f(z).e^{iz}dz = \int_C \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \quad \text{(حسب مبرهنة كوشي)}$$

ومن ثمَّ:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \Rightarrow \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \quad \dots(*)$$

لنأخذ التكامل الأول من مجموع التكاملات السابقة أي لنأخذ التكامل:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx$$

وبإجراء التحويل $x = -x$ فنجد أن $dx = -dx$ وكون أن التكامل محدد فالتغيير يكون على حدود التكامل أيضاً أي:

$$x_1 = -R \Rightarrow -x_1 = R \quad \text{الحد الأدنى للتكامل}$$

$$x_2 = -r \Rightarrow -x_2 = r \quad \text{الحد الأعلى للتكامل}$$

ومن ثمَّ يصبح لدينا:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{R}^{r} \frac{e^{-ix}}{-x}(-dx) = \int_{R}^{r} \frac{e^{-ix}}{x}dx = \text{خواص التكامل المحدد} = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}dx$$

بالعودة إلى (*) نجد أن:

$$-\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

ومن ثمَّ:

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = -\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$$

وبحسب المبرهنة المتعلقة بالحالة الرابعة بجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = -\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz - \lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz \Rightarrow$$

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = -\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz - \lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz \Rightarrow$$

$$2i.I = -\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz - \lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz \quad \ldots(**)$$

ومن ثمَّ التكامل I المطلوب قد ظهر لدينا وبالتالي يمكن حسابه مباشرةً.

ولكن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$ بحسب توطئة جوردان الثانية

ويكون أيضاً:

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = i.R(0).\theta$$ بحسب التوطئة الثالثة

أما θ فهي عبارة عن الزاوية المقابلة لنصف الدائرة γ وهي:

$$\theta = -\pi$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz = i.R(0).\theta = i.R(0).(-\pi)$$

بقي أن نحسب راسب الدالة $F(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ عند القطب البسيط $z = 0$ وذلك حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0) = \lim_{z\to 0} z.F(z) = \lim_{z\to 0} z.\frac{e^{iz}}{z} = \lim_{z\to 0} e^{iz} = 1$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz = i.R(0).(-\pi) = -\pi i$$

أو بطريقة أخرى نحسب التكامل:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

مباشرة مع العلم أن: $z = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{d}{dz} = i.r.e^{i\theta}.d\theta$ ويكون:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{ir.e^{i\theta}}}{r.e^{i\theta}}(i.r.e^{i\theta})d\theta = i.\int_{-\pi}^{0}d\theta = i.\pi$$

وبالعودة إلى (**) نجد أن:

$$2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = -(-\boldsymbol{\pi i}) = \pi i$$

ومنه:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن قيمة التكامل I هي:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

مثال (٢):

احسب باستخدام مبرهنة الرواسب القيمة الرئيسية للتكامل المعتل الآتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2} dx$$

الحل:

إن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\cos mx\, dx$$

ونلاحظ أن $f(x) = \frac{1}{a^2-x^2}$ تابع كسري درجة بسطه تقل عن درجة مقامه بدرجتين، ونلاحظ أن $m = 1 > 0$ إلا أن المقام ينعدم ومن ثمَّ يوجد أقطاب للتابع العقدي $F(z) = f(z).e^{iz}$ تقع على المحور الحقيقي ومن ثمَّ لا بد من عزل أقطاب الدالة $F(z)$ الواقعة على المحور الحقيقي.

لنفرض أن: $F(z) = f(z).e^{iz} = \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}$

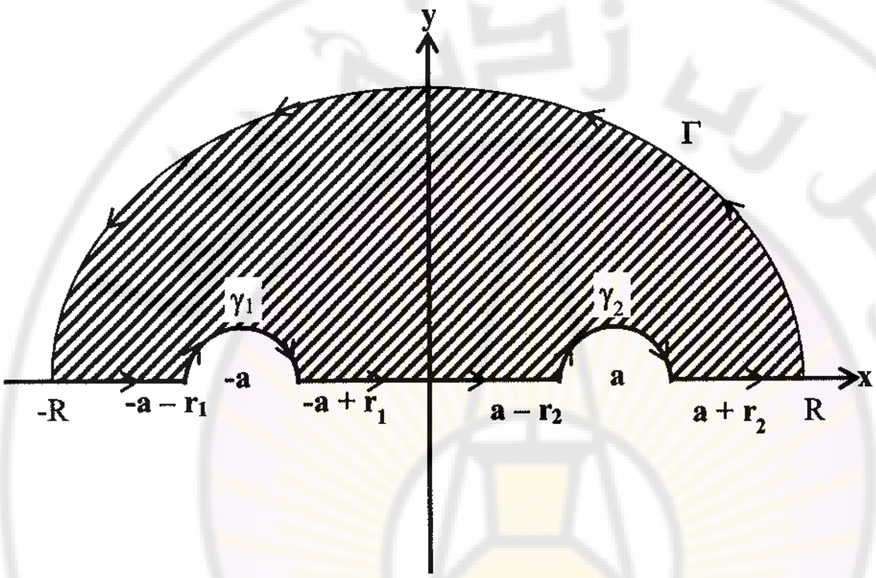
وأقطاب الدالة $F(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$a^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z_1 = -a\,, z_2 = a$$

وهي أقطاب بسيطة تقع على المحور الحقيقي.

ومن ثمَّ نأخذ نصف دائرة γ_1 مركزها $z_1 = -a$ ونصف قطرها r_1 ونأخذ نصف دائرة γ_2 مركزها $z_2 = a$ ونصف قطرها r_2 وبحيث نتجنب الأقطاب الواقعة على المحور الحقيقي

والرسم يوضح ذلك:



الشكل (٧)

وعندها يكون التابع $F(z) = \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}$ تحليلياً داخل وعلى المحيط C وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C F(z)\,dz = \int_C \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}\,dz = \int_{-R}^{-a-r_1} \frac{e^{ix}}{a^2-x^2}\,dx + \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}\,dz + \int_{-a+r_1}^{a-r_2} \frac{e^{ix}}{a^2-x^2}\,dx$$

$$+ \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}\,dz + \int_{r_2+a}^{R} \frac{e^{ix}}{a^2-x^2}\,dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}\,dz = 0$$

وبجعل $r_1 \longrightarrow 0$ و $r_2 \longrightarrow 0$ و $R \longrightarrow \infty$ فنحصل على:

$$\lim_{\substack{r_1\to 0\\ r_2\to 0\\ R\to\infty}}\left[\int_{-R}^{-a-r_1}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx+\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz+\int_{-a+r_1}^{a-r_2}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx\right.$$

$$\left.+\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz+\int_{r_2+a}^{R}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz\right]=0$$

$$\lim_{\substack{r_1\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-R}^{-a-r_1}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx+\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz+\lim_{\substack{r_1\to 0\\ r_2\to 0}}\int_{-a+r_1}^{a-r_2}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx$$

$$+\lim_{r_2\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz+\lim_{\substack{r_2\to 0\\ R\to\infty}}\int_{r_2+a}^{R}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz=0\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{-a}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx+\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz+\int_{-a}^{a}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx$$

$$+\lim_{r_2\to\infty}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz+\int_{a}^{\infty}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz$$

$$=0\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx=$$

$$=-\lim_{r_1\to\infty}\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz-\lim_{r_2\to\infty}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz-\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz$$

ولكن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz=0 \qquad \text{(توطئة جوردان الثانية)}$$

ويكون:

$$\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz = i.R(-a).\theta \qquad \text{(التوطئة الثالثة)}$$

وبحيث θ هي الزاوية المقابل للقوس γ_1 وقيمتها $\theta = -\pi$

$$\lim_{r_2\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{a^2-z^2}dz = i.R(a).\theta \qquad \text{(التوطئة الثالثة)}$$

وبحيث θ هي الزاوية المقابل للقوس γ_2 وقيمتها $\theta = -\pi$ ومن هذا كله يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx = i.R(-a).\theta + i.R(a).\theta = -i.\pi[R(a)+R(-a)]$$

كما وجدنا $z_1 = a$ و $z_2 = -a$ أقطاباً بسيطة للدالة $F(z) = \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}$ ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(a) = \lim_{z\to a}(z-a).F(z) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)e^{iz}}{(a-z)(a+z)} = -\lim_{z\to a}\frac{e^{iz}}{z+a} = \frac{-e^{ia}}{2a}$$

$$R(-a) = \lim_{z\to -a}(z+a).F(z) = \lim_{z\to -a}\frac{(z+a)e^{iz}}{(a-z)(a+z)} = \lim_{z\to -a}\frac{e^{iz}}{a-z} = \frac{e^{-ia}}{2a}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx = i.\pi\left[\frac{-e^{ia}}{2a}+\frac{e^{-ia}}{2a}\right] = -i\pi.(2i)\left[\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{(2a)(2i)}\right] = 2\pi\frac{\sin a}{2a}$$
$$= \frac{\pi.\sin a}{a}$$

والتكامل I المطلوب هو عبارة عن القسم الحقيقي للتكامل السابق ويكون:

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{a^2-x^2}dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}dx = \mathrm{Re}\frac{\pi.\sin a}{a} = \frac{\pi.\sin a}{a}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

احسب قيمة التكامل المعتل التالي:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2} dx \quad ; \quad \alpha, \beta > 0$$

الحل: لنستعرض التكامل التالي:

$$\int_{C} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz$$

وحيث C هو المحيط المبين بالشكل (٦).

ومن ثمّ نلاحظ أن التابع المكامل تحليلي داخل وعلى المنحني C وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_{C} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx$$

$$+ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = 0$$

لدينا التكامل:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx$$

وبإجراء التحويل $x = -x$ فنجد أن $dx = -dx$ وكون أن التكامل محدد فالتغيير يكون على حدود التكامل أيضاً أي:

$x_1 = -R \Rightarrow -x_1 = R$ الحد الأدنى للتكامل

$x_2 = -r \Rightarrow -x_2 = r$ الحد الأعلى للتكامل

ومن ثمَّ يصبح لدينا:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx = \int_{R}^{r} \frac{e^{-i\alpha x} - e^{-i\beta x}}{x^2} (-dx) = -\int_{R}^{r} \frac{e^{-i\alpha x} - e^{-i\beta x}}{x^2} dx$$

$$= \int_{r}^{R} \frac{e^{-i\alpha x} - e^{-i\beta x}}{x^2} dx$$

بالعودة إلى المجموع السابق نجد أن:

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{-i\alpha x} - e^{-i\beta x}}{x^2} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx$$
$$+ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz + \int_{r}^{R} \left[\frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} + \frac{e^{-i\alpha x} - e^{-i\beta x}}{x^2}\right] dx$$
$$+ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz + \int_{r}^{R} \left[\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{x^2} - \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{x^2}\right] dx$$
$$+ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz + 2\int_{r}^{R} \left[\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\right] dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = 0 \Rightarrow$$

$$2\int_{r}^{R} \left[\frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\right] dx = -\int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz - \int_{\Gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz$$

وبحسب المبرهنة المتعلقة بالحالة الرابعة بجعل $0 \to r$ و $\infty \to R$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} 2\int_r^R \left[\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}\right]dx$$
$$= -\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz - \lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz \Rightarrow$$

$$2\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx$$
$$= -\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz - \lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz \Rightarrow$$

$$2.\mathrm{I} = -\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz - \lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz \ \dots (*)$$

ومن ثمَّ التكامل I المطلوب قد ظهر لدينا ومن ثمَّ يمكن حسابه مباشرةً.

ولكن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz = 0$$ (بحسب توطئة جوردان الثانية)

. ويكون أيضاً:

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma \frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz = i.R(0).\theta$$ (بحسب التوطئة الثالثة)

أما θ بحسب توطئة جوردان الثالثة فهي عبارة عن الزاوية المقابلة لنصف الدائرة γ ومن ثمَّ هي:

$$\theta = -\pi$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz = i.R(0).\theta = i.R(0).(-\pi)$$

بقي أن نحسب راسب الدالة $F(z) = f(z).e^{iz}$ عند القطب البسيط $z = 0$

وذلك حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$R(0) = \lim_{z\to 0} z.F(z) = \lim_{z\to 0} z.\frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{i.\alpha e^{i\alpha z}-i.\beta e^{i\beta z}}{1} = i\alpha - i\beta = i(\alpha-\beta)$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{i\alpha z}-e^{i\beta z}}{z^2}dz = i.R(0).(-\pi) = -\pi i\big(i(\alpha-\beta)\big) = \pi(\alpha-\beta)$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$2\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx = -\pi(\alpha-\beta) = \pi(\beta-\alpha)$$

ومنه:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$$

مثال (٤):

احسب قيمة التكامل المعتل التالي:

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx \quad ; \quad 0 < a \in R$$

الحل:

نعلـم أن التـابع $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ هـو تـابع زوجـي والتـابع $h(x)=\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$ هـو أيضاً تابع زوجي وجداء تابعين زوجيين هو تابع زوجي.

ومـن ثمَّ: $g(x).h(x)=\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}$ هـو تـابع زوجـي (إن الترميـز للتوابـع السابقة للتوضيح فقط).

ومن ثمَّ الدالة المراد مكاملتها هي دالة زوجية والتكامل I السابق يكتب بالشكل:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx$$

إن التكامل المعتل التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx$$

هو تكامل من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x).\sin mx\,dx$$

ونلاحـظ أن التـابع $f(x)=\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}$ تـابع كسـري ودرجـة البسـط تقـل عـن درجة المقام بدرجة واحدة، ونلاحظ أيضاً أن $m=1>0$ إلا أن المقام ينعدم ويوجد أقطاباً للدالة $F(z)=f(z).e^{iz}$ تقع على المحور الحقيقي ومن ثمَّ التكامل السابق هو تكامل من الحالة الرابعة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لدينا: $$F(z)=f(z).e^{iz}=\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}$$

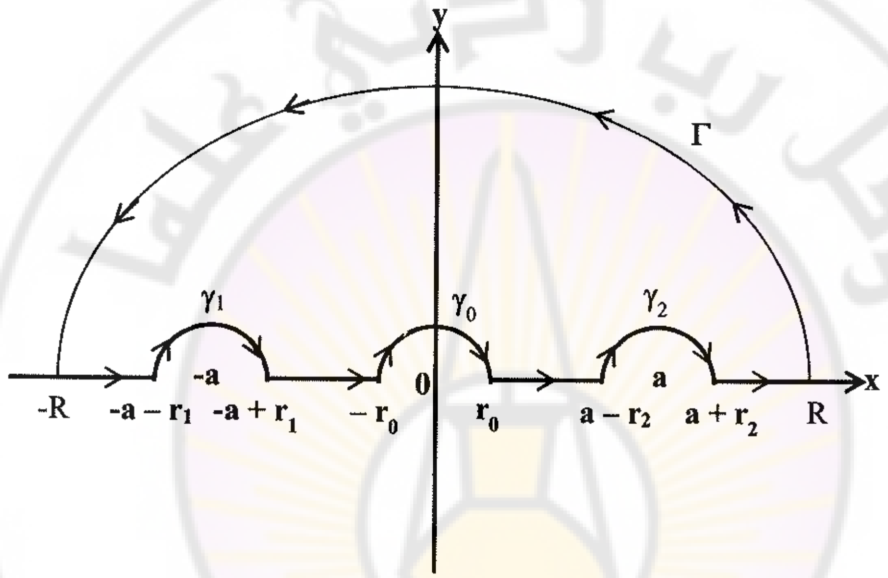
وأقطاب هذه الدالة هي حلول المعادلة:

$$z(z^2-a^2)=0\Rightarrow z_0=0\,,z_1=-a\,,z_2=a\quad;a\in R$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة وتقع على المحور الحقيقي.

حسب المبرهنة الخاصة بالحالة الرابعة نضع داخل المنحني C نصف دائرة γ_0 مركزها $z_0 = 0$ ونصف قطرها r_0 ونصف دائرة γ_1 مركزها $z_1 = -a$ ونصف قطرها r_1 . ونصف دائرة γ_2 مركزها $z_2 = a$ وصف قطرها r_2.

وبحيث نتجنب الأقطاب البسيطة الواقعة على المحور الحقيقي أي نقوم بعزل النقاط $z = 0 , z_1 = -a , z_2 = a$ وفق الشكل التالي (شكل (٨)):



الشكل (٨)

كون التابع $F(z) = \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}$ تحليلياً داخل وعلى المنحني C ومن ثمَّ يكون حسب مبرهنة كوشي:

$$\int_C F(z)dz = \int_C \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

$$\int_C \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{-R}^{-a-r_1} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_1} \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz$$

$$\int_{-a+r_1}^{-r_0} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_0} \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{r_0}^{a-r_2} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$+ \int_{\gamma_2} \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{a+r_2}^{R} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\Gamma} \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

يوجد عدة خطوات للوصول للتكامل المطلوب سوف يتم ترتيبها على النحو الآتي:

الخطوة الأولى: لنأخذ من المجموع السابق التكامل الأول أي

$$\int_{-R}^{-a-r_1} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx$$

ونقوم بإجراء تغيير من الشكل $x = -x$ ومع مراعاة تغيير حدود التكامل نحصل على:

$$\int_{-R}^{-a-r_1} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{R}^{a+r_1} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{-ix}}{x}dx = -\int_{a+r_1}^{R} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

الخطوة الثانية: لنأخذ من المجموع السابق التكامل الثالث أي إن:

$$\int_{-a+r_1}^{-r_0} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx$$

ونقوم بإجراء تغيير من الشكل $x = -x$ ومع مراعاة تغيير حدود التكامل أيضاً فنحصل على:

$$\int_{-a+r_1}^{-r_0} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{a-r_1}^{r_0} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{-ix}}{x}dx = -\int_{r_0}^{a-r_1} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

فيصبح لدينا وبالعودة للمجموع السابق نجد:

$$-\int_{a+r_1}^{R}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{-ix}}{x}dx+\int_{\gamma_1}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{r_0}^{a-r_1}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

$$+\int_{\gamma_0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r_0}^{a-r_2}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$+\int_{\gamma_2}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{a+r_2}^{R}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

الخطوة الثالثة: بحسب المبرهنة المتعلقة بالحالة الرابعة بجعل أنصاف أقطار أنصاف الدوائر $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ تسعى إلى الصفر وبجعل R أيضاً تسعى إلى اللانهاية أي:

$$r_0\to 0\,,r_1\to 0\,,r_2\to 0\,,R\to\infty$$

نجد أن:

$$\lim_{\substack{r_0\to 0\\ r_1\to 0\\ r_2\to 0\\ R\to\infty}}\Bigg[-\int_{a+r_1}^{R}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{-ix}}{x}dx+\int_{\gamma_1}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{r_0}^{a-r_1}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

$$+\int_{\gamma_0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r_0}^{a-r_2}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx\int_{\gamma_2}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz$$

$$+\int_{a+r_2}^{R}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz\Bigg]=0$$

وبالتالي:

$$-\int_{a}^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{-ix}}{x}dx+\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{0}^{a}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{-ix}}{z}dx$$

$$+\lim_{r_0\to 0}\int_{\gamma_0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{0}^{a}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$\lim_{r_2\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_a^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{e^{ix}}{x}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

وبالتالي نجد أن:

$$\int_a^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{x}dx+\int_0^{a}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{x}dx$$

$$+\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz+\lim_{r_0\to 0}\int_{\gamma_0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz$$

$$+\lim_{r_2\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz++\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

ومن الأخيرة نجد أن:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{x}dx$$

$$=-\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz-\lim_{r_0\to 0}\int_{\gamma_0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz$$

$$-\lim_{r_2\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz-\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz$$

الخطوة الرابعة: بحسب توطئة جوردان الثانية نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

وحسب التوطئة الثالثة نجد أن:

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{\gamma_0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz=i.(\theta).R(0)$$

$$\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz=i.(\theta).R(-a)$$

$$\lim_{r_2\to 0}\int\limits_{\gamma_2}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}dz = i.(\theta).R(a)$$

وحيث θ هي الزاوية المقابلة لكل قوس من الأقواس الدائرية $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$ وقيمتها هي نفسها لكل قوس وتساوي:

$$\theta = -\pi$$

ومن هذا كله نجد:

$$2i\int_0^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx = -i.(\theta).R(0) - i.(\theta).R(-a) - i.(\theta).R(a)$$

$$= i\pi\big(R(0)+R(-a)+R(a)\big)$$

الخطـوة الخامسـة: لنحسـب الرواسـب للدالـة $F(z) = \frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}.\frac{e^{iz}}{z}$ عنـد أقطابهـا البسيطة وذلك حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب:

$$R(0) = \lim_{z\to 0} z.F(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}e^{iz} = -1$$

$$R(-a) = \lim_{z\to -a}(z+a).F(z) = \lim_{z\to -a}\frac{(z+a)(z^2+a^2)}{(z-a)(z+a)}\frac{e^{iz}}{z}$$

$$= \lim_{z\to -a}\frac{(z^2+a^2)}{(z-a)}\frac{e^{iz}}{z} = \frac{2a^2.e^{-ia}}{2a^2} = e^{-ia}$$

$$R(a) = \lim_{z\to a}(z-a).F(z) = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)(z^2+a^2)}{(z-a)(z+a)}\frac{e^{iz}}{z}$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{(z^2+a^2)}{(z+a)}\frac{e^{iz}}{z} = \frac{2a^2.e^{ia}}{2a^2} = e^{ia}$$

ومن هذه الخطوات جميعها نحصل على:

$$2i\int_0^{\infty}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}.\frac{\sin x}{x}dx = i\pi(-1+e^{-ia}+e^{ia}) = i\pi(-1+2\cos a)$$

ومن ثمَّ:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{\sin x}{x} dx = \frac{i\pi(-1+2\cos a)}{2i} = \frac{\pi(2\cos a - 1)}{2}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥):

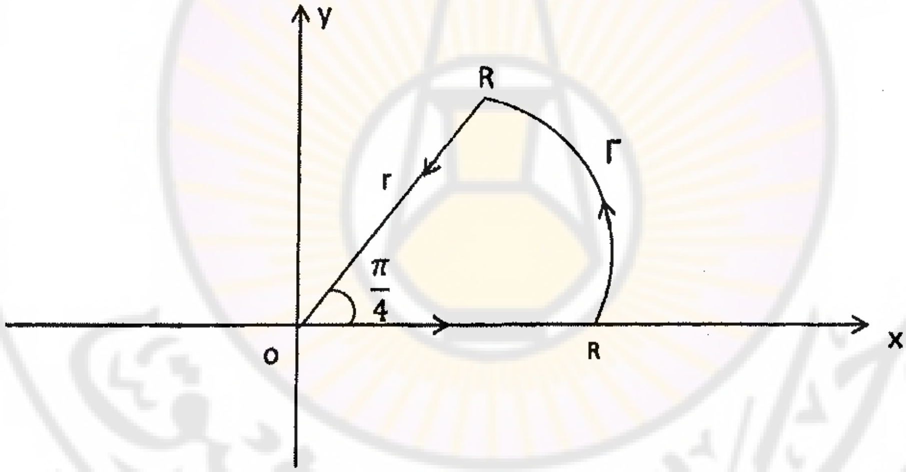
احسب قيمة كل من التكاملين التاليين:

$$I_1 = \int_{0}^{\infty} \cos x^2 \, dx \qquad , \qquad I_2 = \int_{0}^{\infty} \sin x^2 \, dx$$

يُدعى هذان التكاملان بتكاملي فرينيه.

الحل:

نكامل التابع $f(z) = e^{iz^2}$ على المنحني المبين بالشكل (٩) الآتي:



الشكل (٩)

نأخذ طريق المكاملة المنحني C المكون من القطعة الواقعة على المحور الحقيقي $[0, R]$ وقوس الدائرة Γ حيث:

$$\Gamma: |z| = R.e^{i\theta} \quad ; \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

كذلك المجال I بحيث:

$$I : |z| = r.e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; 0 \leq r \leq R$$

ومن ثمَّ يكون التابع المراد مكاملته أي $f(z) = e^{iz^2}$ تابعاً تحليلياً في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C المأخوذ ويكون حسب مبرهنة كوشي:

$$\int_C e^{iz^2} dz = 0 \Rightarrow \int_0^R e^{iz^2} dz + \int_\Gamma e^{iz^2} dz + \int_I e^{iz^2} dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_\Gamma e^{iz^2} dz + \int_I e^{iz^2} dz = 0 \quad \dots (*)$$

لنقوم بحساب قيمة التكامل:

$$\int_\Gamma e^{iz^2} dz$$

من أجل $z \in \Gamma$ يكون $z = R.e^{i\theta}$ وبحيث $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ومن ثمَّ لنأخذ:

$$\left|e^{iz^2}\right| = \left|e^{i(R.e^{i\theta})^2}\right| = \left|e^{i.R^2[\cos 2\theta + i.\sin 2\theta]}\right| = \left|e^{i.R^2.\cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta}\right|$$

$$= \left|e^{i.R^2.\cos 2\theta}. e^{-R^2 \sin in 2\theta}\right| = \left|e^{i.R^2.\cos 2\theta}\right|.\left|e^{-R^2 \sin in 2\theta}\right| = e^{-R^2 \sin 2\theta}$$

وبالاستفادة من متراجحة جوردان التالية:

$$\frac{4\theta}{\pi} \leq \sin 2\theta \quad ; \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \dots (1)$$

نجد أن:

$$\left|e^{iz^2}\right| = e^{-R^2 \sin 2\theta} \leq e^{-R^2\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\int_\Gamma e^{iz^2} dz\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i(R.e^{i\theta})^2} (i.R.e^{i\theta}) d\theta\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{i(R.e^{i\theta})^2} (i.R.e^{i\theta})\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2[\cos2\theta + i.\sin2\theta]}\left(i.R.e^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2\cos2\theta}.\,e^{-R^2.\sin2\theta}.\left(i.R.e^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2.\cos2\theta}\right|.\left|e^{-R^2.\sin2\theta}\right|.\left|\left(i.R.e^{i\theta}\right)\right|d\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2.\sin2\theta}d\theta$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2.\sin2\theta}d\theta \leq \text{(1) بحسب المتراجحة} \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)}d\theta$$

وبالتالي توصلنا إلى:

$$\left|\int_\Gamma e^{iz^2}dz\right| \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)}d\theta = R\left[\frac{1}{-R^2\left(\frac{4}{\pi}\right)}.\,e^{-R^2\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= R\left[-\frac{\pi}{4R^2}.\,e^{-R^2} + \frac{\pi}{4R^2}\right] = \frac{\pi}{4R}\left[1 - e^{-R^2}\right]$$

وبجعل $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma e^{iz^2}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4R}\left[1 - e^{-R^2}\right] = 0$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{iz^2}dz = 0 \quad \ldots(**)$$

هذه من جهة ومن جهة أخرى لنقوم بحساب التكامل على المجال I أي لنحسب التكامل:

$$\int_{I} e^{iz^2} dz$$

لدينا: $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ وبالتالي:

$$e^{iz^2} = e^{i\left(r.e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = e^{i.r^2.e^{\frac{\pi}{2}i}} = e^{-r^2} \quad ;0 \le r \le R$$

$$\Rightarrow \int_{I} e^{iz^2} dz = \int_{R}^{0} e^{-r^2}.e^{\frac{\pi}{4}i}\, dr = e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{R}^{0} e^{-r^2}\, dr = -e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{0}^{R} e^{-r^2}\, dr$$

مع العلم أن $dz = dr.\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_{I} e^{iz^2} dz = -e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{0}^{R} e^{-r^2}\, dr$$

وبجعل $R \to \infty$ نحصل على ما يلي:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I} e^{iz^2} dz = \lim_{R\to\infty} -e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{0}^{R} e^{-r^2}\, dr = -e^{\frac{\pi}{4}i}. \int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, dr = -e^{\frac{\pi}{4}i}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مع العلم أن:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I} e^{iz^2} dz = -e^{\frac{\pi}{4}i}.\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad .... (***)$$

بالعودة إلى (*) وبجعل $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_\Gamma e^{iz^2}dz+\int_I e^{iz^2}dz\right]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{ix^2}dx+\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{iz^2}dz+\lim_{R\to\infty}\int_I e^{iz^2}dz=0$$

وبالاستفادة من (**) ومن (***) نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{ix^2}dx=e^{\frac{\pi}{4}i}.\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx=e^{\frac{\pi}{4}i}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومن المعادلة الأخيرة وبفصل القسمين الحقيقي والتخيلي والمطابقة نجد أن:

$$\int_0^\infty (\cos x^2+i.\sin x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx+i.\int_0^\infty \sin x^2\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}+i.\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\Rightarrow$$

$$I_1=I_2=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

الحالة الخامسة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

وهي حساب التكاملات المعتلة من الشكل:

$$\mathbf{I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\,dx \quad ... \quad (1)}$$

حيث α عدد حقيقي وليس صحيحاً، أما $f(x)$ فهو تابع كسري عادي (النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن أقطاب فقط) حيث $f(z)$ هو التابع العقدي الناتج عن $f(x)$ بتبديل كل x بالمتحول العقدي z .

٢ . ٩ . ٩ . مبرهنة (١):

لتكن $z = \infty$ صفراً من المرتبة k بالنسبة للتابع $f(z)$ عندئذٍ يكون نشر لوران للتابع $f(z)$ في جوار نقطة اللانهاية من الشكل التالي:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-k+1}}{c^{k-1}} + \cdots$$

وبحيث إن $c_{-k} \neq 0$ وبناءً على المبرهنة رقم (٥) من الفقرة (١ . ٢٤ . ٣) نجد أنه كون $z = \infty$ صفراً من المرتبة k عندئذٍ يكون عندما $z \to \infty$ العلاقة التقاربية التالية:

$$f(z) \cong \frac{A}{z^k} \quad ; \; A = c_{-k} \neq 0$$

- إذا كانت $k = 1$ فعندئذٍ يكون راسب التابع $f(z)$ عند اللانهاية هو:

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -c_{-1} = -A$$

- أما إذا كانت $k \geq 2$ فإن راسب التابع $f(z)$ عند اللانهاية يكون معدوماً أي:

$$\text{Res}[f(z), \infty] = 0$$

وبعبارة أخرى يكون:

$$f(z) \cong \frac{A}{z^k} \;\; (z \to \infty) \Rightarrow \text{Res}[f(z), \infty] = -A \quad ; \;\; k = 1$$

$$f(z) \cong \frac{A}{z^k} \;\; (z \to \infty) \Rightarrow \text{Res}_\infty[f(z)] = 0 \quad ; \;\; k \geq 1$$

٢ . ٩ . ١٠ . مبرهنة (٢):

ليكن:

$$M(r) = \max_{z \in \gamma_r} |f_1(z)|$$
$$M(R) = \max_{z \in \Gamma_R} |f_1(z)| \qquad ; \quad f_1(z) = z^{\alpha-1}.f(z)$$

وبحيث إن:

$\gamma_r : |z| = r \quad , \quad \Gamma_R : |z| = R$ (دائرتين متحدتين المركز)

إذا تحقق:

$$\underset{R \to \infty}{R.M(R) \to 0} \quad , \quad \underset{r \to 0}{r.M(r) \to 0}$$

عندئذٍ يكون:

$$\int_{\gamma_r} f_1(z)\,dz \to 0 \quad (r \to 0) \quad , \quad \int_{\Gamma_R} f_1(z)\,dz \to 0 \quad (R \to \infty)$$

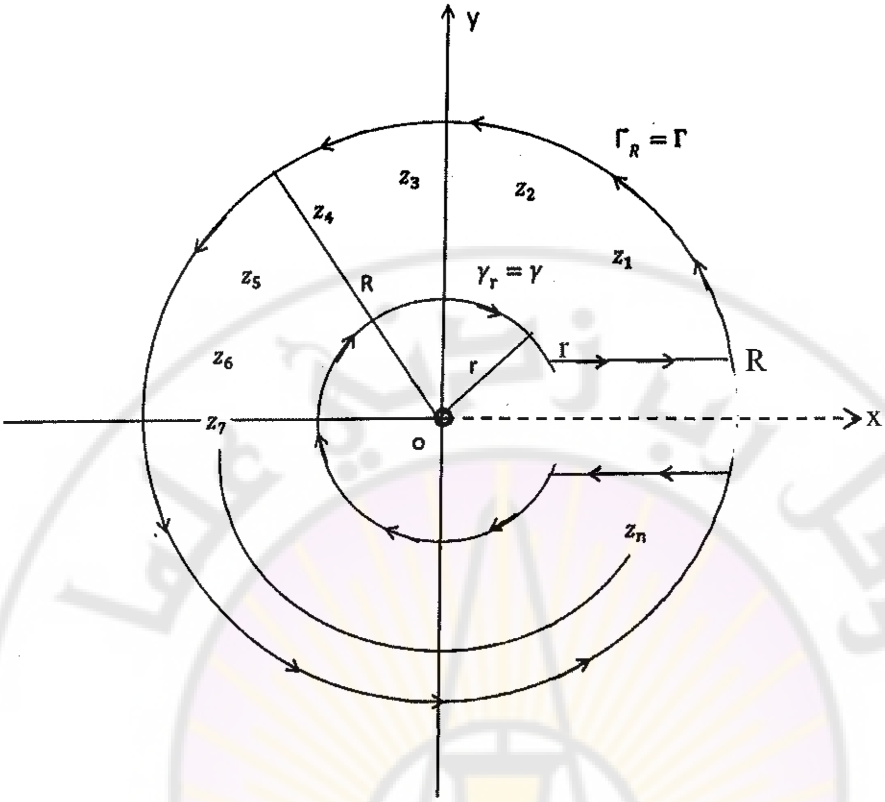
وهذه المبرهنة تقبل دون ذكر البرهان.

بالعودة للحالة الخامسة:

إن التكامل (1) يسمى تحويل ميلين للتابع $f(x)$، وهذا التحويل يستخدم في الرياضيات الفيزيائية، وكذلك في النظرية التحليلية للأعداد والتكامل المذكور (1) يتقارب (يمكن مكاملته) إذا وفقط إذا كان التابع $f(z)$ لايملك أقطاباً على نصف المحور الحقيقي الموجب أي على المجال $]0,\infty[$ وإذا تحقق:

$$\lim_{z\to 0}|z|^{\alpha}.f(z) = 0 \dots (2) \quad , \quad \lim_{z\to\infty}|z|^{\alpha}.f(z) = 0 \dots (3)$$

وحيث $f(z)$ هو تابع تحليلي في المستوي العقدي باستثناء عدد محدود من الأقطاب غير واقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي وفق الشكل (١٠) الآتي:



الشكل (١٠)

- يمكن اعتبار $z = 0$ ليست صفراً وليست قطباً للتابع $f(z)$ ونتيجة الشروط المفروضة على الدالة $f(z)$ نجد أن (2) محققة عندما $\alpha > 0$ ولنأتِ الآن إلى الشرط (3) نلاحظ أنه من أجل التابع $f(z)$ تتحقق العلاقة التقريبية التالية:

$$\underset{z \to \infty}{f(z) \cong \frac{A}{z^k}} \; ; \; A \neq 0, k \in Z \quad \dots \quad (4)$$

وبموجب المبرهنة (١) (٢ . ٩ . ٩) فالشرط (٣) محقق فقط وفقط إذا $k - \alpha > 0$ وبذلك نجد أن التكامل (1) وحيث لايوجد للتابع $f(z)$ أقطاب على نصف المحور الحقيقي الموجب $]0, \infty[$ وحيث $f(0) \neq 0$ يتقارب فقط وفقط إذا كانت $0 < \alpha < k$ وحيث k يتعرف من العلاقة التقريبية (4).

ومن هذا كله ينتج أن:

$$\underset{z \to \infty}{f(z) \to 0}$$

ولكي نتمكن من تطبيق مبرهنة الرواسب علينا حساب التكامل (1) تفصيلياً، فنقوم بعملية التمديد التحليلي للتابع المستكمل على كلّ أنحاء المستوي العقدي.

(نفرض أن الدالة المكاملة تحليلية في كل أنحاء المستوي العقدي)ونفرض أن D هي الساحة من المستوي العقدي باستثناء القطع على طول النصف الموجب من المحور الحقيقي.

لنعزل (لنفصل) من المنطقة D فرعاً تحليلياً نسميه $h(z)$ وليكن $h(z) = z^{\alpha-1}$ وبحيث يكون موجباً على الضفة العلوية وكما نعلم في الساحة D يكون:

$$\forall z \in D \quad z = r.e^{i\theta} \quad ; 0 < \theta = \arg z < 2\pi$$

بالعودة إلى عبارة $h(z)$ نجد أن:

$$h(z) = z^{\alpha-1} = \left(r.e^{i\theta}\right)^{\alpha-1} = r^{\alpha-1}.e^{i\theta(\alpha-1)} \quad ; 0 < \theta < 2\pi$$

على القسم العلوي للمقطع لدينا $\theta = 0$ ومن ثمَّ:

$$h(z) = h(x + i.0) = h(x) = x^{\alpha-1} \quad ; \; x > 0$$

أما على القسم السفلي للمقطع يكون $\theta = 2\pi$ ويكون:

$$h(z) = h(x - i.0) = h(\tilde{x}) = x^{\alpha-1}.e^{2\pi i(\alpha-1)} \Rightarrow$$
$$h(\tilde{x}) = h(x).e^{2\pi\alpha i} \quad ; \quad h(x) > 0$$

لنفرض أن:

$$f_1(z) = f(z).h(z) \Rightarrow f_1(z) = z^{\alpha-1}.f(z) \; ; h(z) = z^{\alpha-1} \quad \Rightarrow$$
$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) \Rightarrow f_1(\tilde{x}) = h(x).e^{2\pi\alpha i}.f(x) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$$

لنبرهن أخيراً أنه من أجل التكامل (1) تتحقق العلاقة:

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[z^{\alpha-1}.f(z)\,, z = z_k]$$

حيث: z_k أقطاب الدالة $f(z)$ وحيث إن المجموع ممتد على جميع أقطاب التابع المذكور.

بالعودة إلى الشكل المرسوم لنأخذ المحيط C من الشكل السابق والمكون من الدائرتين γ و Γ وبحيث:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z| = R$$

والمجالان $[r, R]$ و $[R, r]$ والممتدان على الترتيب، والواقعان على القسم العلوي والقسم السفلي وبحيث تكون R كبيرة بقدر كافٍ r صغيرة بقدر كافي وبحيث جميع أقطاب التابع تقع داخل المنحني C عندئذٍ باستخدام مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$I = \int_C f_1(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k] \;\; \Rightarrow$$

$$\int_R^r f_1(z)dz + \int_\gamma f_1(z)dz + \int_r^R f_1(z)dz + \int_\Gamma f_1(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k] \Rightarrow$$

$$\int_R^r f_1(\tilde{x})dx + \int_\gamma f_1(z)dz + \int_r^R f_1(x)dx + \int_\Gamma f_1(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k]$$

علينا حساب كل تكامل من التكاملات السابقة، ولكن بالعودة إلى المبرهنة (٢) في (٢ . ٩ . ١٠) نجد أن التكاملين الثاني والأخير معدومان (جميع الشروط محققة)، وذلك بعد جعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ وبالتعويض المباشر نجد أن:

$$\int_{\infty}^{0} f_1(\tilde{x})dx + \int_{0}^{\infty} f_1(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k] \Rightarrow$$

أي إن:

$$-\int_{0}^{\infty} f_1(\tilde{x})dx + \int_{0}^{\infty} f_1(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k]$$

ولكن نعلم أن:

$$f_1(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x) \Rightarrow$$

ومن ثم فإن:

$$-\int_{0}^{\infty} e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)dx + \int_{0}^{\infty} f_1(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k] \Rightarrow$$

$$-e^{2\pi\alpha i}.I + I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k] \Rightarrow$$

$$I.(1 - e^{2\pi\alpha i}) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k] \Rightarrow$$

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[z^{\alpha-1}.f(z), z = z_k]$$

وهو المطلوب.

٢ . ٩ . ١١ . نتيجة:

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المستوي العقدي باستثناء عدد منته من الأقطاب غير واقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي وإذا كان:

$$\lim_{z\to 0}|z|^{\alpha}.f(z) = 0 \quad , \quad \lim_{z\to\infty}|z|^{\alpha}.f(z) = 0$$

وكان: $0 \le \arg z \le 2\pi$

فإن قيمة التكامل (1) تكون بالشكل التالي:

$$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\,dx=\frac{-\pi}{\sin\alpha\pi}.e^{-i\alpha\pi}[R_1+R_2+\cdots R_n]$$

وحيث $R_1, R_2, \dots R_n$ رواسب التابع $f_1(z)=z^{\alpha-1}.f(z)$ عند جميع أقطابه:

$$z_1, z_2, z_3, \dots z_n$$

الواقعة في الساحة D باستثناء نقاط المحور الحقيقي الموجب.

۲ . ۹ . ۱۲ . مثال محلول (۱):

أوجد قيمة التكامل:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}dx$$

الحل:

إن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)dx$$

وهو تكامل من الحالة الخامسة من تطبيقات مبرهنة الرواسب، ونلاحظ أن جميع الشروط محققة أي إن التابع $f(z)$ يحقق جميع الشروط الواردة في النتيجة التي حصلنا عليها بالدراسة النظرية، ومن ثمّ التكامل I يعطى بحسب النتيجة (۲ . ۹ . ۱۱) بالعلاقة الآتية:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}=\frac{-\pi}{\sin\alpha\pi}.e^{-i\alpha\pi}(R_1+R_2+\cdots R_n)\quad \dots(*)$$

وحيث $R_1, R_2, \dots R_n$ رواسب التابع: $f_1(z)=\frac{z^{\frac{-1}{4}}}{z+1}$

الواقعة في الساحة D باستثناء نقاط المحور الحقيقي الموجب.

لدينا $f(z)=\frac{1}{z+1}$ والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z+1=0 \Rightarrow z=-1$$

وهي عبارة عن قطب بسيط أما راسب التابع $f_1(z)=\frac{z^{\frac{-1}{4}}}{z+1}$ عند هذا القطب فحسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\operatorname{Res}[f_1(z), z=-1]=\lim_{z\to -1}(z+1).f_1(z)=\lim_{z\to -1}(z+1).f_1(z)$$

$$=\lim_{z\to -1}(z+1).\frac{z^{\frac{-1}{4}}}{z+1}=\lim_{z\to -1} z^{\frac{-1}{4}}=(-1)^{\frac{-1}{4}}$$

$$=\left(e^{\pi i}\right)^{\frac{-1}{4}}=e^{\frac{-\pi}{4}i}$$

بالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}=\frac{-\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}.e^{-i\frac{3\pi}{4}}.e^{\frac{-\pi}{4}i}=\frac{-\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}e^{-\pi i}=\frac{\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\pi$$

٢ . ٩ . ١٣ . مثال محلول (٢):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx \quad ; \quad 0<\alpha<1$$

يُطلب دراسة تفصيلية لهذا التكامل.

الحل: نلاحظ أن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)dx \quad ; \; f(x)=\frac{1}{1+x}$$

لنأخذ التابع $f(z)=\frac{1}{z+1}$ الناتج عن التابع $f(x)$ وذلك بتبديل كل x بالمتحول العقدي z، ولنرَ فيما إذا كانت الشروط محققة على التابع $f(z)$ والشرط الأول لكي نتمكن من إيجاد قيمة التكامل I_1 هو أن يكون التابع $f(z)$ لايملك أقطاباً واقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي ونلاحظ وضوحاً أن هذا الشرط محقق لأن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$z+1=0 \Rightarrow z=-1$ وهذه النقطة غير واقعة على الجزء الموجب للمحور الحقيقي.

أما الشرط الثاني فهو أن يتحقق:

$$\lim_{z\to 0}|z|^{\alpha}.f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^{\alpha}}{z+1}=0\ ;\ \alpha=\frac{3}{4}\quad \dots\ (1)$$

$$\lim_{z\to \infty}|z|^{\alpha}.f(z)=\lim_{z\to \infty}\frac{|z|^{\alpha}}{z+1}=0\quad \dots\ (2)$$

ونعلم أن الشرط (1) محقق عندما $\alpha>0$ ولكن حسب الفرض $0<\alpha<1$ والشرط (1) محقق، أما الشرط (2) فنعلم أنه يتحقق إذا كانت $\alpha<k$ حيث k تتعين من العلاقة التقاربية الآتية:

$$\underset{z\to\infty}{f(z)\cong\frac{c_{-k}}{z^{k}}}$$

ونعلم حسب مبرهنة (١) في (٢ . ٩ . ٩) مأخوذة أنا هذه العلاقة التقاربية محققة إذا وفقط إذا كان للتابع $f(z)$ صفراً من المرتبة k عند اللانهاية، ويمكن التحقق أن النقطة $z=\infty$ هي صفر بسيط للتابع $f(z)$ ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\underset{z\to\infty}{f(z)\cong\frac{c_{-1}}{z}}$$

ومن ثمَّ $k = 1$ والشرط (2) محقق عندما $\alpha < k = 1$ ولكن من الفرض $1 > \alpha > 0$ ومن ثمَّ نستنتج أن التابع $f(z)$ يحقق الشروط المفروضة عليه والتكامل I_1 هو تكامل من الحالة الخامسة من تطبيقات مبرهنة الرواسب.

ونلاحظ أن:

$z = 0$ هي عبارة عن نقطة تفرع للتابع $f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}$.

لنأخذ المحيط C المكون من الدائرتين Γ, γ وبحيث:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z| = R$$

والقطعتين $[R, r]$ و $[r, R]$ الممتدتين على الترتيب وفق الشكل (١٠).

ولدينا:

على الجزء العلوي للضفة أي على المقطع الممتد من $[r, R]$ يكون:

$$h(z) = h(x) = x^{\alpha-1} \quad ; x > 0$$

على الجزء السفلي للضفة (المقطع) يكون:

$$h(z) = h(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}.h(x) = e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}$$

ويكون لدينا على الضفة العلوية للمقطع:

$$f_1(x) = h(x).f(x) = x^{\alpha-1}.f(x)$$

ويكون على الضفة السفلية للمقطع:

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.h(x).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x) = e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.f(x)$$

ومن هذا كله وبحسب مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}dz = 2\pi i.\text{Res}\left[f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}, z = -1\right]$$

وحيث $z = -1$ هي قطب الدالة $f(z) = \frac{1}{z+1}$ غير الواقعة على الجزء الموجب للمحور الحقيقي ويكون لدينا بحسب النتائج التي حصلنا عليها من مبرهنة كوشي (تحليل عقدي(١)):

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z = -1]$$

وبجعل R أكبر ما يمكن وr أصغر ما يمكن أي بجعل $R \to \infty$ و $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[\int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz\right]$$
$$= 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z = -1]$$

$$\Rightarrow \int_\infty^0 f_1(\tilde{x})\,dx + \lim_{r\to 0}\int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_0^\infty f_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z = -1]$$

ولكن التكاملين الثاني والأخير من المجموع السابق معدومان بحسب المبرهنة (٢) في (١٠.٩.٢) ومن ثمَّ فإن:

$$\int_\infty^0 f_1(\tilde{x})\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx = 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z = -1]$$

وحسب ما سبق وجدنا أن:

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.h(x).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$$

وبالتعويض نجد أن:

$$\int_\infty^0 e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx = 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z = -1] \Rightarrow$$

$$-e^{2\pi\alpha i}\int_0^\infty f_1(x)\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx = 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z=-1] \Rightarrow$$

$$(1-e^{2\pi\alpha i}).\int_0^\infty f_1(x)\,dx = 2\pi i.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z=-1] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z=-1] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z=-1] \ldots (*)$$

ولكن راسب التابع $f_1(z)$ عند $z=-1$ يتم حسابه حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب:

$$\operatorname{Res}[f_1(z)\,, z=-1] = \lim_{z\to -1}(z+1).f_1(z) = \lim_{z\to -1} z^{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1}$$
$$= (e^{\pi i})^{\alpha-1} = e^{\pi(\alpha-1)i} = e^{\pi\alpha i}.e^{-\pi i} = -e^{\pi\alpha i}$$

ومن ثمّ يكون وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.(-e^{\pi\alpha i}) = \frac{-2\pi i}{e^{-\pi\alpha i}-e^{\pi\alpha i}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}$$
$$= \frac{\pi}{\frac{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \quad \Rightarrow$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

٢ . ٩ . ١٤ . مثال محلول (٣):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+b}dx \quad ; \quad 0<\alpha<1 \quad , b>0$$

الحل:

إن التكامل I_2 يتم حسابه بنفس الدراسة التفصيلية للتكامل I_1 الذي تم حسابه في المثال السابق مع مراعاة أنَّ النقاط الشاذة للتابع $f(z) = \frac{1}{z+b}$ هي عبارة عن $z = -b$ التي هي قطب بسيط غير واقع على الجزء الموجب من المحور الحقيقي.

- في الجانب العملي إذا ورد هذا السؤال لا بد من ذكر جميع التفاصيل التي تم ذكرها في المثال السابق (٢ ـ ٩ . ١٣)، أما الآن فسوف نقوم بحساب التكامل I_2 مباشرة، وذلك إذا فرضنا أننا أنجزنا عملية الدراسة التفصيلية كاملة ويكون:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} . \text{Res}\left[f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} , z = -b \right]$$

ولكن راسب التابع $f_1(z)$ عند $z = -b$ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد:

$$\begin{aligned} \text{Res}[f_1(z), z = -b] &= \lim_{z \to -b} (z+b). f_1(z) = \lim_{z \to -b} z^{\alpha-1} = (-b)^{\alpha-1} \\ &= (-1)^{\alpha-1}. (b)^{\alpha-1} = (e^{\pi i})^{\alpha-1}. (b)^{\alpha-1} \\ &= e^{\pi(\alpha-1)i}. (b)^{\alpha-1} = e^{\pi\alpha i}. e^{-\pi i}. (b)^{\alpha-1} \\ &= -e^{\pi\alpha i}. (b)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

ومن ثَمَّ يكون:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} . \left(-e^{\pi\alpha i}. (b)^{\alpha-1} \right) = \frac{-2\pi i}{e^{-\pi\alpha i} - e^{\pi\alpha i}} . (b)^{\alpha-1}$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}} . (b)^{\alpha-1} = \frac{\pi. (b)^{\alpha-1}}{\frac{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}}{2i}} = \frac{\pi. (b)^{\alpha-1}}{\sin\alpha\pi} \Rightarrow$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx = \frac{\pi. (b)^{\alpha-1}}{\sin\alpha\pi}$$

٢ . ٩ . ١٥ . مثال محلول (٤):

احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+2}dx \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

الحل:

إن المثال السابق هو تطبيق مباشر للمثال (٣) وذلك بإعطاء $b = 2$ ويكون:

$$I_3 = \frac{\pi.(b)^{\alpha-1}}{\sin\alpha\pi} = \frac{\pi.(2)^{\alpha-1}}{\sin\alpha\pi} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.2^{\alpha-1}$$

٢ . ٩ . ١٦ . مثال محلول (٥):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}dx \quad ; \quad 0 < \alpha < 4$$

الحل:

إن التكامل المعطى هو تكامل من الشكل:

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\,dx \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

لنأخذ التابع $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ الناتج من تبديل كل x بالمتحول العقدي z ولنرَ فيما إذا كانت الشروط المفروضة في الحالة الخامسة على التابع $f(z)$ محققة أم لا.

إن أقطاب الدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z^2+1 = 0 \Rightarrow z_1 = i\,, z_2 = -i$ وهي عبارة عن أقطاب مضاعفة كما نلاحظ وهذه الأقطاب لاتقع على الجزء الموجب من المحور الحقيقي، ومن الملاحظ أن:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|^{\alpha}}{(1+z^2)^2} = 0$$

وذلك كون $\alpha > 0$ بالفرض كما أن الشرط

$$\lim_{z \to \infty} \frac{|z|^{\alpha}}{(1+z^2)^2} = 0$$

أيضاً محقق حسب الدراسة النظرية وكون أن $\alpha < k = 4$ وحيث k تم تعيينها من العلاقة التقاربية التالية:

$$f(z) \underset{z \to \infty}{\cong} \frac{c_{-4}}{z^4}$$

والعلاقة التقاربية السابقة محققة كما نعلم إذا وفقط إذا كانت $z = \infty$ صفراً من المرتبة الرابعة للتابع $f(z)$. ويمكن التحقق أن $z = \infty$ هي صفر من المرتبة الرابعة للتابع $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ وبناءً على تحقق الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ فنحن أمام الحالة الخامسة من تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لنأخذ المحيط C المكون من الدائرتين γ , Γ وبحيث:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z| = R$$

والقطعتين $[R, r]$ و $[r, R]$ الممتدتين على الترتيب وفق الشكل (١٠).

إن $z = 0$ هي عبارة عن نقطة تفرع للتابع $f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{(z^2+1)^2}$ ولدينا:

على الجزء العلوي للمقطع يكون:

$$h(z) = h(x) = x^{\alpha-1} \quad ; x > 0$$

على الجزء السفلي للمقطع يكون:

$$h(z) = h(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}.h(x) = e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}$$

ويكون لدينا على الجزء العلوي للمقطع:

$$f_1(x) = h(x).f(x) = x^{\alpha-1}.f(x)$$

ويكون على الجزء السفلي للمقطع:

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.h(x).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$$
$$= e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.f(x)$$

ويكون لدينا بحسب مبرهنة الرواسب:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C \frac{z^{\alpha-1}}{(z^2+1)^2}\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\right]$$

وبحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_R^r f_1(\tilde{x})dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(x)dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\right]$$

وبجعل $R \to \infty$ و $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[\int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz\right]$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \lim_{r\to 0}\int_\gamma f_1(z)\,dz + \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_r^R f_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\right] \Rightarrow$$

ولكن بحسب المبرهنة (٢) في (٢ . ٩ . ١٠) يكون التكاملان الثاني والأخير معدومين عندما $r \to 0$ و $R \to \infty$ ومن ثمَّ وبالتعويض المباشر نجد أن:

$$\int_\infty^0 f_1(\tilde{x})\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\right]$$

ولكن كما وجدنا:

$$f_1(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$$

ومن ثمَّ:

$$-\int_0^\infty e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx$$
$$= 2\pi i.\big[\mathrm{Res}[f_1(z)\,,z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\big] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f_1(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}dx =$$
$$\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\big[\mathrm{Res}[f_1(z)\,,z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\big] \quad ..(*)$$

بقي أن نحسب رواسب الدالة $f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}$ عند الأقطاب $z_1 = i$ و $z_2 = -i$.

وكون أن كلاً من النقطتين السابقتين هما عبارة عن أقطاب مضاعفة فحسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}[f_1(z)\,,z_1 = i]$$
$$=$$
$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2.f_1(z)] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2.\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i}\frac{(\alpha-1).z^{\alpha-2}.(z+i)^2 - 2(z+i).z^{\alpha-1}}{(z+i)^4}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{(\alpha-1).z^{\alpha-2}.(z+i) \ - 2.z^{\alpha-1}}{(z+i)^3}$$

$$= \frac{(\alpha-1).(i)^{\alpha-2}.(2i) - 2.(i)^{\alpha-1}}{(2i)^3}$$

$$= \frac{(\alpha-1).(i)^{\alpha-2}.(2i) + 2(i)^2.(i)^{\alpha-1}}{-8i} = \frac{(\alpha-1).(i)^{\alpha-2} + (i)^\alpha}{-4}$$

$$= \frac{(\alpha-1).(i)^{\alpha}.(i)^{-2}+(i)^{\alpha}}{-4} = \frac{(i)^{\alpha}.[(\alpha-1)(-1)+1]}{-4}$$

$$= \frac{(i)^{\alpha}.[2-\alpha]}{-4} = \frac{(i)^{\alpha}.[\alpha-2]}{4} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}.[\alpha-2]}{4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[f_1(z), i] = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}.[\alpha-2]}{4}$$

$$\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_2=-i] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}[(z+i)^2.f_1(z)]$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[(z+i)^2.\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right] = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{(z-i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{(\alpha-1).z^{\alpha-2}.(z-i)^2-2(z-i).z^{\alpha-1}}{(z-i)^4}$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{(\alpha-1).z^{\alpha-2}.(z-i)\;-2.z^{\alpha-1}}{(z-i)^3}$$

$$= \frac{(\alpha-1).(-i)^{\alpha-2}.(-2i)-2.(-i)^{\alpha-1}}{(-2i)^3}$$

$$= \frac{(\alpha-1).(-i)^{\alpha-2}.(-2i)+2(i)^2.(-i)^{\alpha-1}}{8i}$$

$$= \frac{-(\alpha-1).(-i)^{\alpha-2}+i.(-i)^{\alpha-1}}{4} =$$

$$= \frac{-(\alpha-1).(-i)^{\alpha}.(-i)^{-2}+i.(-i)^{\alpha}.(-i)^{-1}}{4}$$

$$= \frac{(\alpha-1).(-i)^{\alpha}-(-i)^{\alpha}}{4} = \frac{(-i)^{\alpha}.[(\alpha-1)-1]}{4} = \frac{(-i)^{\alpha}.[\alpha-2]}{4}$$

$$= \frac{e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}.[\alpha-2]}{4} \quad \Rightarrow \mathrm{Res}[f_1(z), -i] = \frac{e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}.[\alpha-2]}{4}$$

ومن ثمّ وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}.[\alpha-2]}{4}+\frac{e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}.[\alpha-2]}{4}\right]$$

$$= \frac{2\pi i.(\alpha-2)}{4}.\left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}+e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}}{1-e^{2\pi\alpha i}}\right]$$

$$= \frac{2\pi i.(\alpha-2)}{4}.\left[\frac{e^{-\pi\alpha i}.\left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}+e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}\right)}{e^{-\pi\alpha i}.(1-e^{2\pi\alpha i})}\right]$$

$$= \frac{2\pi i.(\alpha-2)}{4}.\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\alpha i}+e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{e^{-\pi\alpha i}-e^{\pi\alpha i}}\right] = \frac{-\pi.(\alpha-2)}{4}.\left[\frac{2\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\alpha i}+e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{2}\right)}{\frac{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}{2i}}\right]$$

$$= \frac{\pi.(2-\alpha)}{4}.\left[\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\pi\alpha}\right] = \frac{\pi.(2-\alpha)}{4}.\left[\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha.\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\right]$$

$$= \frac{\pi.(2-\alpha)}{4\sin\frac{\pi}{2}\alpha}$$

ومن ثمّ نستنتج أن:

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi.(2-\alpha)}{4\sin\frac{\pi}{2}\alpha}$$

٢ . ٩ . ١٧ . مثال (٦):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2}dx \quad ; \quad 0<\alpha<2$$

الحل:

إن التكامل المعطى هو تكامل من الشكل:

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\, dx$$

لنأخذ التابع $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ ولنبحث فيما إذا كانت الشروط المفروضة في الحالة الخامسة على التابع $f(z)$ محققة .

إن أقطاب الدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$(z+1)^2 = 0 \Rightarrow z+1 = 0 \Rightarrow z = -1$ وهي عبارة عن قطب مضاعف كما نلاحظ و لا تقع على الجزء الموجب الحقيقي ومن الملاحظ أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^\alpha}{(1+z)^2} = 0$$

وذلك كون $\alpha > 0$ بالفرض كما أن الشرط

$$\lim_{z\to \infty} \frac{|z|^\alpha}{(1+z^2)^2} = 0$$

أيضاً محقق وكون أن $\alpha < k = 2$ وحيث k تم تعيينها من العلاقة التقاربية التالية:

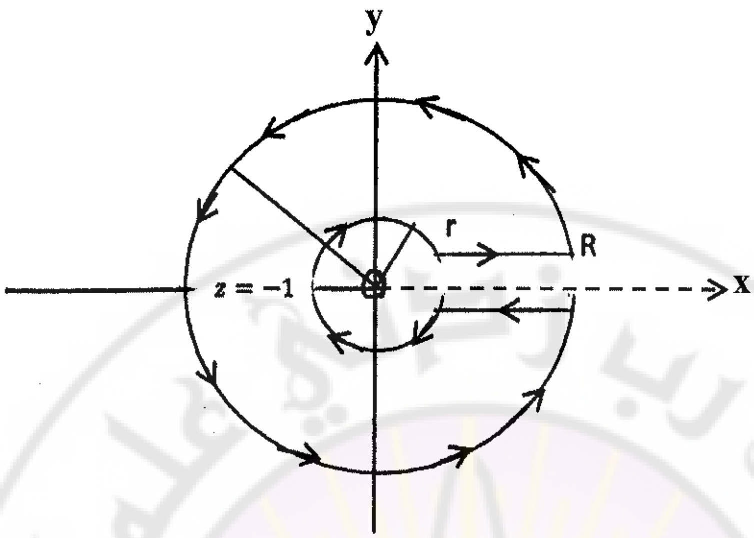
$$f(z) \cong \frac{c_{-2}}{z^2}$$
$$z \to \infty$$

والعلاقة التقاربية السابقة محققة كما نعلم إذا وفقط إذا كانت $z = \infty$ صفراً من المرتبة الثانية للتابع $f(z)$. ويمكن التحقق أن $z = \infty$ هي صفر من المرتبة الثانية للتابع $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ وبناءً على تحقق الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ فالتكامل I_5 هو تكامل من الحالة الخامسة من تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لنأخذ المحيط C المكون من الدائرتين Γ, γ وبحيث:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z| = R$$

والقطعتين $[R, r]$ و $[r, R]$ الممتدتين على الترتيب وفق الشكل التالي: (الشكل (١١))



الشكل (١١)

إن $z=0$ هي عبارة عن نقطة تفرع للتابع $f_1(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{(z+1)^2}$ ولدينا:

على الجزء العلوي للضفة يكون:

$$h(z)=h(x)=x^{\alpha-1}\quad ;x>0$$

على الجزء السفلي للضفة يكون:

$$h(z)=h(\tilde{x})=e^{2\pi\alpha i}.h(x)=e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}$$

ويكون لدينا على الجزء العلوي للمقطع

$$f_1(x)=h(x).f(x)=x^{\alpha-1}.f(x)$$

ويكون على الجزء السفلي للمقطع:

$$f_1(\tilde{x})=h(\tilde{x}).f(x)=e^{2\pi\alpha i}.h(x).f(x)=e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$$
$$=e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.f(x)$$

ويكون لدينا بحسب مبرهنة الرواسب:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C \frac{z^{\alpha-1}}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right]$$

وبحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right]$$

وبجعل $R \to \infty$ و $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\left[\int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz\right]$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \lim_{r\to 0}\int_\gamma f_1(z)\,dz + \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_r^R f_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right] \Rightarrow$$

ولكن بحسب المبرهنة (٢) في (٢ . ٩ . ١٠) يكون التكاملان الثاني والأخير معدومين عندما $r \to 0$ و $R \to \infty$ ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_\infty^0 f_1(\tilde{x})\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx = 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right]$$

وبالتالي:

$$-\int_0^\infty e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)\,dx + \int_0^\infty f_1(x)\,dx = 2\pi i.\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f_1(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z=-1]\right] \quad ..(*)$$

لنحسب راسب الدالة $f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2}$ عند القطب $z=-1$

وكون أن $z=-1$ هي عبارة عن قطب مضاعف فحسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}[f_1(z)\,,z=-1]$$

$$=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dx}[(z+1)^2.f_1(z)]$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2.\frac{z^{\alpha-1}}{(z+1)^2}\right]=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[z^{\alpha-1}]=$$

$$\lim_{z\to-1}(\alpha-1).z^{\alpha-2}=(\alpha-1).(-1)^{\alpha-2}=(\alpha-1).(-1)^{\alpha}.(-1)^{-2}$$

$$=(\alpha-1).(e^{\pi i})^{\alpha}=(\alpha-1).e^{\pi\alpha i}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[f_1(z),z=-1]=(\alpha-1).e^{\pi\alpha i}$$

ومن ثمّ وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2}dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\left[(\alpha-1).e^{\pi\alpha i}\right]$$

$$=2\pi i.(\alpha-1).\left[\frac{e^{\pi\alpha i}}{1-e^{2\pi\alpha i}}\right]=2\pi i.(\alpha-1).\left[\frac{1}{e^{-\pi\alpha i}.(1-e^{2\pi\alpha i})}\right]$$

$$=2\pi i.(\alpha-1).\left[\frac{1}{e^{-\pi\alpha i}-e^{\pi\alpha i}}\right]$$

$$=-\pi.(\alpha-1).\left[\frac{1}{\frac{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}{2i}}\right]=-\pi.(\alpha-1).\left[\frac{1}{\sin\pi\alpha}\right]=\frac{\pi.(1-\alpha)}{\sin\pi\alpha}$$

ومن ثمّ نستنتج أن:

$$I_5=\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{(x+1)^2}dx=\frac{\pi.(1-\alpha)}{\sin\pi\alpha}$$

۲ . ۹ . ۱۸ . مثال محلول (۷):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1}dx \quad 0 < \alpha < 2$$

الحل:

إن عملية إيجاد التكامل بطريقة تفصيلية أصبحت واضحة من خلال الأمثلة السابقة، وفي هذا المثال سوف نقوم بحساب التكامل مباشرة.

لنأخذ $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ وأقطاب الدالة $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = i\,, z_2 = -i$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة للتابع $f(z)$ ومنه يكون:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.\big[\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_2 = -i]\big]..(*)$$

لنقم بحساب رواسب الدالة $f_1(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z^2+1}$ وذلك حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب يكون:

$$\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_1 = i] = \lim_{z\to i}(z-i).f_1(z) = \lim_{z\to i}(z-i).\frac{z^{\alpha-1}}{(z-i).(z+i)}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)} = \frac{(i)^{\alpha-1}}{2i} = \frac{-(i)^{\alpha}}{2} = \frac{-\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{\alpha}}{2} = \frac{-e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{2}$$

$$\mathrm{Res}[f_1(z)\,, z_2 = -i] = \lim_{z\to -i}(z+i).f_1(z)$$

$$= \lim_{z\to -i}(z+i).\frac{z^{\alpha-1}}{(z-i).(z+i)} = \lim_{z\to -i}\frac{z^{\alpha-1}}{(z-i)} = \frac{(-i)^{\alpha-1}}{-2i}$$

$$= \frac{(-i)^{\alpha}.(-i)^{-1}}{-2i} = \frac{-\left(e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}\right)^{\alpha}}{2} = -\frac{e^{\frac{3\pi}{2}\alpha.i}}{2}$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1} dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.\left[-\frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{2} - \frac{e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}}{2}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{2}.\left[\frac{-e^{\frac{\pi}{2}\alpha i} - e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}}{1-e^{2\pi\alpha i}}\right] = \frac{2\pi i}{2}.\left[\frac{e^{-\pi\alpha i}\left(-e^{\frac{\pi}{2}\alpha i} - e^{\frac{3\pi}{2}\alpha i}\right)}{e^{-\pi\alpha i}(1-e^{2\pi\alpha i})}\right] =$$

$$\frac{2\pi i}{2}.\left[\frac{-e^{\frac{-\pi}{2}\alpha i} - e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{e^{-\pi\alpha i} - e^{\pi\alpha i}}\right] = \frac{2\pi i}{2}.\left[\frac{e^{\frac{-\pi}{2}\alpha i} + e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}}\right] = \pi.\left[\frac{\frac{e^{\frac{-\pi}{2}\alpha i} + e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}}{2}}{\frac{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}}{2i}}\right] =$$

$$= \pi.\left[\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\pi\alpha}\right] = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$I_6 = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}\alpha}$$

٢ . ١٠ . تعاريف ومفاهيم أساسية:

الزاوية الرئيسية (العُمدة): $Arg(z)$ للعدد غير الصفري المركب z هي تلك القيمة من بين قيم الزاوية $arg(z)$ ضمن المجال $]-\pi, \pi]$ النصف مفتوح أي إن:

$$-\pi < Arg(z) \leq \pi$$

وعليه ينتج أن:

$$arg(z) = Arg(z) + 2\pi k \quad ; \quad k \in z$$

ومن ثمّ بمعرفة الزاوية الرئيسية نستطيع إيجاد الزاوية(السعة) ونعلم أن:

$$tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = arc\, tg\frac{y}{x}$$

وبحيث $z = x + iy$ وإن $x = r.\cos\theta$ و $y = r.\sin\theta$

القيمة الرئيسية لتابع الظل العكسي: $Arc\, tg\frac{y}{x}$ هي تلك القيمة الرئيسية من بين قيم $arc\, tg\frac{y}{x}$ الواقعة ضمن المجال $[-\pi, \pi]$، وعندئذٍ نجد أن الزاوية الرئيسية $Arg(z)$ تحسب تبعاً لموقع النقطة $z = x + iy$ في المستوي المركب C من خلال العلاقات التحليلية التالية:

$$Arg(z) = \begin{cases} Arc\, tg\frac{y}{x} & ;\ x > 0 \\ Arc\, tg\frac{y}{x} + \pi & ;\ x < 0 \quad , \quad y > 0 \\ Arc\, tg\frac{y}{x} - \pi & ;\ x < 0 \quad , \quad y < 0 \end{cases} \quad ...(*)$$

وهكذا إذا وقعت النقطة z في الربع الأول أو الرابع من المستوي المركب C فإننا نستخدم العلاقة الأولى وإذا وقعت في الربع الثاني فإننا نستخدم العلاقة الثانية أما إذا وقعت z في الربع الثالث فنخص الحالة الثالثة، ومن ثم فإن:

$Arg(z) > 0$ في الربعين الأول والثاني ويكون $Arg(z) < 0$ في الربعين الثالث والرابع دوماً.

هذا من جهة ومن جهة أخرى تكون لدينا العلاقات التالية:

$$z = x\ ; x > 0 \Leftrightarrow z \in ox^+ \Leftrightarrow Arg\,(z) = 0$$

$$z = iy\ ; y > 0 \Leftrightarrow z \in oy^+ \Leftrightarrow Arg\,(z) = \frac{\pi}{2} \quad ...(**)$$

$$z = x\ ; x < 0 \Leftrightarrow z \in ox^- \Leftrightarrow Arg\,(z) = \pi$$

$$z = iy\ ; y < 0 \Leftrightarrow z \in oy^- \Leftrightarrow Arg\,(z) = -\frac{\pi}{2}$$

وهذا يفسر أن الزاوية الرئيسية لعدد حقيقي موجب تكون مساوية للصفر، وأن الزاوية الرئيسية تساوي $\frac{\pi}{2}$ عندما تكون واقعة على النصف الموجب oy^+، وأن الزاوية الرئيسية لعدد عقدي مساوية لـ π- عندما تكون واقعة على ox^- وتكون مساوية لـ $-\frac{\pi}{2}$ عندما تكون واقعة على oy^-.

نتائج:

١ . لكل عدد عقدي زاوية رئيسية واحدة فقط.

٢ . من أجل $z = 0$ تكون الزاوية غير معينة.

٣ . أخذنا $]-\pi, \pi]$ في التعريف السابق للمحافظة على وحدانية التعيين للزاوية الرئيسية $\text{Arg}\ (z)$ عندما $z \in ox^-$، وكان باستطاعتنا أخذ المجال $[-\pi,\pi[$، وعندها فإن $\text{Arg}(z) = -\pi$ عندما تكون $z \in ox^-$ والأكثر من هذا كله إذا أخذنا أي مجال آخر فإن العلاقات (*) و (**) تفقد صحتها أو يُستعاض عنها بصيغ رياضية أخرى لسنا بصدد دراستها.

٤ . نلفت الانتباه أننا نستخدم العلاقات التحليلية (*) إذا تعذر علينا إيجاد الزاوية هندسياً، وعلى سبيل المثال نطرح الأمثلة التالية:

$$1)\ \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad ; k \in Z$$

$$2)\ \text{Arg}(-1+3i) = \text{Arc tg}(-3) \ \Rightarrow \arg(-1+3i) = \text{Arc tg}(-3) + 2\pi k \quad ; k \in Z$$

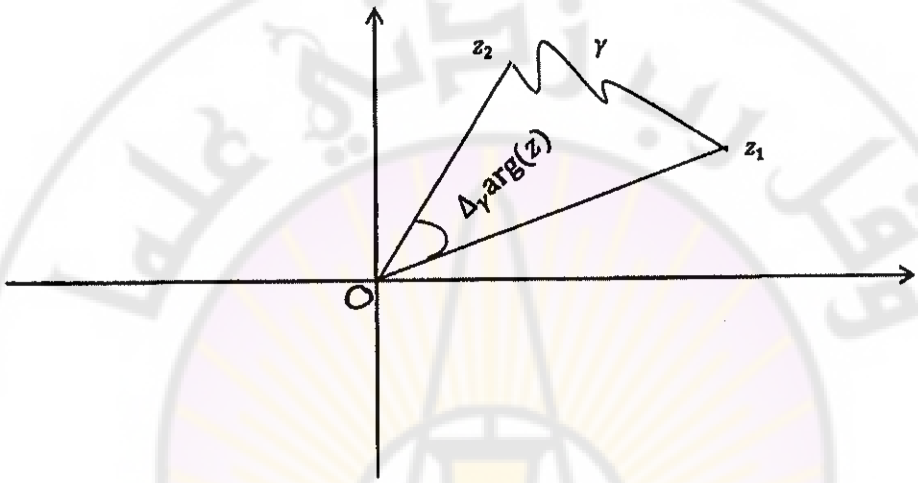
$$3)\ \text{Arg}(\pi) = 0 \ \Rightarrow \arg(\pi) = 2\pi k \quad ; k \in Z$$

$$4)\ \text{Arg}(-e.\,i) = \frac{-\pi}{2} \ \Rightarrow \arg(-e.\,i) = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k \quad ; k \in Z$$

$$5)\ \text{Arg}(-3-4i) = \text{Arc tg}\left(\frac{4}{3}\right) - \pi \ \Rightarrow \arg(-3-4i) = \text{Arc tg}\left(\frac{4}{3}\right) + 2\pi k - \pi \quad ; k \in Z$$

$$6)\ \mathrm{Arg}(1-i) = \mathrm{Arc\,tg}(-1) = \frac{-\pi}{4} \Rightarrow \arg(1-i) = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k\ ;\ k \in Z$$

تعريف تزايد العُمدة على طريق: ليكن γ طريقاً ما غير مار بالنقطة $z = 0$ نسمي زاوية دوران الشعاع z عندما ترسم النقطة z الطريق γ من بدايته إلى نهايته بتغير عمدة z على طول الطريق γ ونرمز لذلك بالرمز $\Delta_\gamma \arg(z)$ والشكل (١٢) الآتي يوضح ذلك:



الشكل (١٢)

هندسياً يكون تزايد العمدة على طريق ما γ هو مقدار الدوران حول النقطة o (المبدأ) عندما يمسح المنحني γ دائرة مرة واحدة إيجاباً أو سلباً تبعاً لتوجيه المنحني المفروض ولعل الأمثلة توضح ذلك:

١ ـ إذا كان γ هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i$ عندئذٍ تكون:

$$\Delta_\gamma \arg(z - z_0) = \Delta_\gamma \arg(z) \qquad ; z_0 = 0$$

ومن ثمّ فإن مقدار زاوية الدوران حول $z_0 = 0$ عندما تمسح z المنحني مرة واحدة إيجابياً أو سلبياً تبعاً للتوجيه عندئذٍ يكون وضوحاً:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

٢ . بينما إذا كان γ هو نصف الدائرة $\{\,|z| = 1\,;\, \mathrm{Im}z \geq 0\}$ المرسوم بالاتجاه الموجب فيكون:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \pi$$

٣ . بينما إذا كان γ هو نصف الدائرة $\{\,|z| = 1\,;\, \mathrm{Im}z \leq 0\}$ فيكون:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = -\pi$$

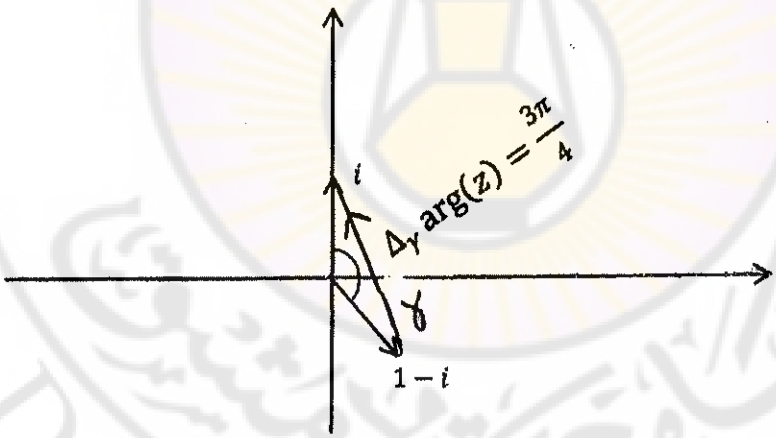
مثال:

احسب $\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$ في الحالات التالية:

١ . $\gamma\colon [1 - i, i]$ حيث $z_0 = 0$ فيكون:

$$\Delta_\gamma \arg(z - z_0) = \Delta_\gamma \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$

والشكل التالي يوضح ذلك:



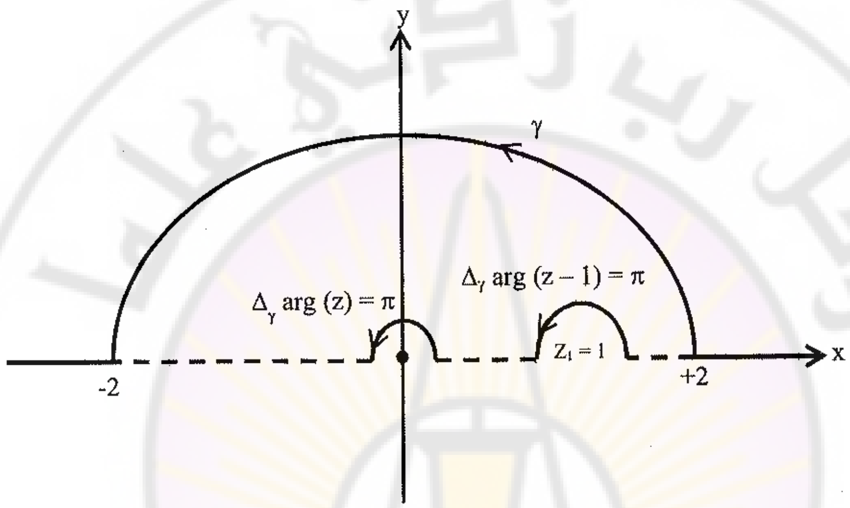
الشكل (١٣)

٢ . γ منحنٍ في النصف العلوي للدائرة $|z| = 2$ حيث $z_0 = 0$ ثم $z_1 = 1$

هندسياً مقدار زاوية الدوران للشعاع z عندما تمسح النقطة z المنحني γ المفروض من بدايته إلى نهايته ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \pi$$
$$\Delta_\gamma \arg(z-1) = \pi$$

والشكل يوضح ذلك:



الشكل (١٤)

٣ . γ منحني النصف السفلي للدائرة $|z| = 2$ حيث $z_0 = 0$ ثم $z_1 = 1$

هندسياً مقدار زاوية الدوران للشعاع z عندما تمسح النقطة z المنحني γ المفروض من بدايته إلى نهايته ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = -\pi$$
$$\Delta_\gamma \arg(z-1) = -\pi$$

ملاحظة هامة: تعطى العلاقة المعبرة عن تزايد العمدة على طول طريق γ تحليلياً بالصيغة الآتية:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \int_\gamma \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \quad ; x = r.\cos\theta , y = r.\sin\theta$$

أو بالعلاقة الآتية:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \operatorname{Img} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

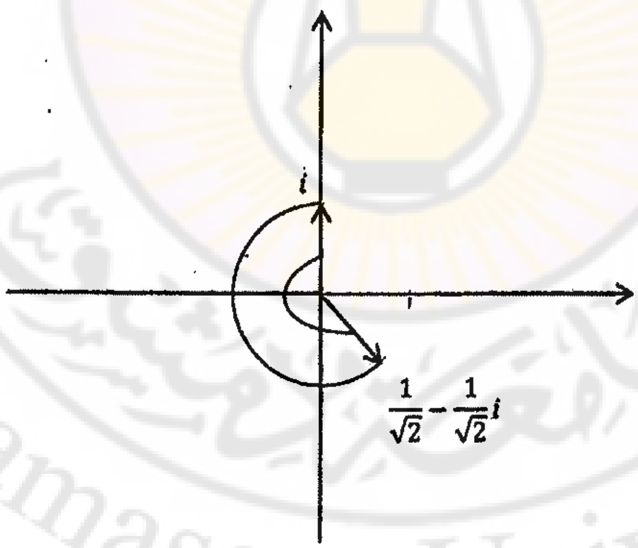
مثال:

ليكن γ هو جزء من دائرة الوحدة موجه اتجاهاً إيجابياً يبدأ بـ i وينتهي بـ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$ والمطلوب:

احسب $\Delta_\gamma \arg(z)$ بطريقتين هندسياً وتحليلياً.

الحل:

هندسياً هي مقدار زاوية الدوران للشعاع z عندما تمسح النقطة z المنحني γ المفروض من بدايته إلى نهايته والشكل التالي يوضح ذلك: (الشكل (١٥))



الشكل (١٥)

ومن ثمَّ نستنتج من الشكل أن:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \frac{5\pi}{4}$$

أما تحليلياً فنقوم بحساب تزايد العُمدة من العلاقة الثانية:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \mathrm{Img} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

وبإجراء التحويل:

$$z = e^{it} \Rightarrow dz = i.e^{it}dt$$

$$z = i \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \Rightarrow t = \frac{7\pi}{4}$$

ويكون:

$$\Delta_\gamma \arg(z) = \mathrm{Img} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{Img} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{i.e^{it}}{e^{it}} dt = \mathrm{Img} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} i.dt$$

$$= \mathrm{Img}\left(i[t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \right) = [t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{5\pi}{4}$$

٢ . ١١ . تتمة حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

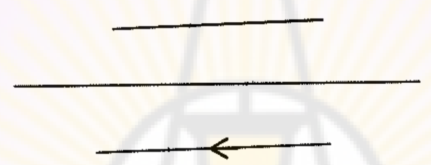
الحالة السادسة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

وهي حساب التكاملات (التكاملات من نمط التابع بيتا) والتي هي من الشكل:

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1-x}}\right)^\alpha . \mathbf{f(x)dx} \quad ...(\mathbf{1})$$

وبحيث إن α عدد حقيقي وليس صحيحاً، وإن $-1 < \alpha < 1$ والتابع $f(x)$ هو تابع كسري عادي (نظامي) والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة أقطاب فقط وهذه الأقطاب لا تنتمي إلى المجال المغلق $[0,1]$.

لنأخذ الشكل الآتي (شكل (١٦))::



الشكل (١٦)

وبحيث:

$$\gamma = \{\, |z| = r\} \quad , \quad \Gamma = \{\, |z-1| = r\}$$
$$I_1 = \{\, r \le x \le 1-r\} \quad , \quad I_2 = \{1 - r \le x \le r\}$$

وبحيث r نختارها صغيرة بقدر كافٍ، والجدير بالذكر أنه بإجراء التحويل $y = \frac{x}{1-x}$ فإن التكامل (1) يؤول إلى تكامل من شكل الحالة الخامسة.

إن عملية الوصول من التكامل (1) إلى شكل التكامل من الحالة الخامسة تكون كما يلي:

نجري التحويل $y = \frac{x}{1-x}$ وكون التكامل (1) هو تكامل محدد فعملية إجراء التحويل هذه يرافقها إجراء تحويل في حدود التكامل:

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \left[\frac{x}{1-x}\right]_{x=0} = 0$$ الحد الأدنى للتكامل(1)

$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \left[\frac{x}{1-x}\right]_{x=1} = \infty$$ الحد الأعلى للتكامل(1)

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y(1-x) = x \Rightarrow y - x.y = x \Rightarrow y = x(1+y) \Rightarrow$$

$$x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

بالتعويض في التكامل (1) نجد أن:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}.f(x)dx = \int_0^{\infty} y^{\alpha}.f\left(\frac{y}{1+y}\right).\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} y^{\alpha}.F(y)dy \quad ; \quad F(y) = f\left(\frac{y}{1+y}\right).\frac{1}{(1+y)^2}$$

وبفرض أن $\alpha = \beta - 1$ نجد أنه وكون $-1 < \alpha < 1$ بالفرض فيكون:

$$0 < \beta < 2$$

ويكون لدينا التكامل I بالشكل:

$$I = \int_0^{\infty} y^{\beta-1}.F(y)dy \quad ; \ 0 < \beta < 2$$

وكما نعلم هو تكامل من الحالة الخامسة الذي يمثل تحويل ميلين للتابع $F(y)$.

بالعودة إلى الحالة السادسة.

لنبرهن الآن أنه من أجل التكامل (1) تتحقق العلاقة التالية:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} . f(x)dx$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} . \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \dots (*)$$

وبحيث أن:

$$f_1(z) = f(z). h(z) = f(z). \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \quad ; \quad h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$$

وحيث $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$ هي جميع الأقطاب المحددة للتابع $f(z)$. لنمدد التابع المستكمل تحليلياً على المستوي العقدي، ولتكن D هي الساحة للمستوي العقدي باستثناء قطع على طول المجال المغلق $[0, 1]$ ولنفصل (لنعزل)فرعاً تحليلياً $h(z)$ موجباً على الجزء العلوي للمقطع فعندئذٍ يكون:

$h(x + i0) = h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \quad ; 0 < x < 1$ (على القسم العلوي للمقطع).

$h(x - i0) = h(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}. h(x)$ (على القسم السفلي للمقطع).

وعندئذٍ يكون:

$f_1(x + i0) = f_1(x) = f(x). h(x)$ (على القسم العلوي للمقطع).

$f_1(x - i0) = f_1(\tilde{x}) = f(x). h(\tilde{x}) = f(x). h(x). e^{2\pi\alpha i} = f_1(x). e^{2\pi\alpha i}$

(على القسم السفلي للمقطع).

وبحيث:

$\tilde{z} = x - i0 = \tilde{x}$ على القسم السفلي للمقطع.

$z = x + i0 = x$ على القسم العلوي للمقطع.

لبرهان العلاقة (*) الآنفة الذكر نأخذ المنحني C كما هو موضح بالشكل (١٦) السابق مؤلف من دائرتين غير متحدتي المركز ونصل بينهما بقطعتين مستقيمتين منطبقتين على المحور الحقيقي وبحيث r نصف قطر هاتين الدائرتين يكون صغيراً بقدر كافٍ.

وبحيث تقع جميع أقطاب الدالة $f(z)$ خارج المنحني C وبناءً على ذلك وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$I = \int_C f_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f_1(z)$$

هذه من جهة ومن جهةٍ أخرى وبتطبيق النتيجة من مبرهنة كوشي (التكامل على المنحني الخارجي يساوي مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية) يكون:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_{l_1} f_1(z)\,dz + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{l_2} f_1(\tilde{z})\,dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^{1-r} f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f_1(z) \Rightarrow$$

وبجعل r أصغر ما يمكن أي بجعل $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\left[\int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^{1-r} f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx\right]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_0^1 f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_1^0 f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)$$

ولكن بحسب المبرهنة (٢) من الفقرة (٢. ٩. ١٠) نجد أن التكاملين الأول والثالث من العلاقة السابقة معدومان، وذلك عندما تسعى r إلى الصفر وذلك كون:

$|f_1(z)| \le M$ محدوداً والتابع $f(z)$ تحليلياً عند $z = 0$ وشروط المبرهنة (٢) محققة ومن ثمّ:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz = 0$$

ومنه:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_1^0 f_1(\tilde{x})\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z) \Rightarrow$$
$$\int_0^1 f_1(x)\,dx - e^{2\pi\alpha i}\int_0^1 f_1(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)$$
$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

وهو المطلوب.

مهمتنا الآن حساب الراسب عند $z = \infty$ للتابع $f_1(z)$ وهذه تتم بعدة خطوات:

الخطوة الأولى: كون التابع $f(z)$ تحليلياً في النقطة $z = \infty$ ننشر التابع $f(z)$ بمتسلسلة لوران في جوار تلك النقطة من الشكل:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots \quad ; \quad |z| > R$$

الخطوة الثانية: ننشر التابع $h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ في متسلسلة لوران في جوار اللانهاية.

إن $h(z)$ يكتب بالشكل:

$$h(z) = h(\infty).g(z)$$

أما التابع $g(z)$ فهو يعطى بالعلاقة التالية:

$$g(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha}$$

ويكون بحسب منشور الكرخي- نيوتن:

$$g(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{z^2} + \cdots$$

وهو تابع تحليلي في $z = \infty$ والأكثر من ذلك يكون $g(\infty) = 1$، وكذلك لدينا: $h(z) = \left|\frac{z}{1-z}\right|^{\alpha} e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$، أما بالنسبة لـ $h(\infty)$ فهو عبارة عن:

$$h(\infty) = e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

وبحيث $\varphi_1 = \Delta_{\gamma_1} \arg(z - z_0) = \Delta_{\gamma_1} \arg(z)$ تزايد عُمدة z على طول الطريق γ_1 التي هي عبارة عن زاوية دوران الشعاع z عندما ترسم النقطة z الطريق γ_1 من بدايته إلى نهايته.

وكذلك: $\varphi_2 = \Delta_{\gamma_1} \arg(z - z_0) = \Delta_{\gamma_1} \arg(z - 1)$ تزايد عُمدة $z - 1$ على طول الطريق γ_1 التي هي عبارة عن زاوية دوران الشعاع $(z - 1)$ عندما ترسم النقطة $z - 1$ الطريق γ_1 من بدايته إلى نهايته.

أما γ_1 هو طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية للمقطع بالنقطة $1 < x_0$ كما هو موضح بالشكل (١٦).

وبناءً على ذلك ومن الشكل (١٦) يكون لدينا:

$$\varphi_1 = \Delta_{\gamma_1} \arg(z) = 0 \quad , \quad \varphi_2 = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1) = -\pi$$

وبالتعويض في عبارة $h(\infty)$ نجد:

$$h(\infty) = e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)} = e^{\alpha\pi i}$$

الخطوة الثالثة: نعلم أن $f_1(z) = f(z).h(z)$

ومن ثمَّ يكون حسب ما وجدنا في الخطوتين الأولى والثانية ما يلي:

$$f_1(z) = f(z).h(z) = f(z).h(\infty).g(z)$$

$$= \left(c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\right).e^{\alpha\pi i}.\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{z^2} + \cdots\right); \ |z| > R \Rightarrow$$

$$f_1(z) = \left(c_0 + \frac{c_0.\alpha}{z} + \frac{c_0.\alpha(\alpha+1)}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-1}.\alpha}{z^2} + \cdots\right).e^{\alpha\pi i}$$

$$= \left(c_0 + \frac{c_0.\alpha + c_{-1}}{z} + \frac{c_0.\alpha(\alpha+1) + c_{-1}.\alpha}{z^2} + \cdots\right).e^{\alpha\pi i} \quad ; |z| > R$$

الخطوة الرابعة والأخيرة: الراسب عند $z = \infty$ للتابع $f_1(z)$ هو عبارة عن أمثال الحد $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران مضروباً بإشارة ناقص ومن ثمَّ نجد:

$$Res_{z=\infty} f_1(z) = -e^{\alpha\pi i}.(c_0.\alpha + c_{-1})$$

إضافي: لتوضيح فكرة إيجاد الراسب عند $z = \infty$ للتابع $f_1(z)$ لدينا الطريقة الآتية:

$$f_1(z) = h(z).f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}.f(z) = \left(\frac{z}{z-1}.(-1)\right)^{\alpha}.f(z) =$$

$$= \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha}.(-1)^{\alpha}.f(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\alpha}}.e^{\pi\alpha i}.f(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\alpha}}.e^{\pi\alpha i}.f(z)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha}.e^{\pi\alpha i}.f(z)$$

وبالاستفادة من منشور كرخي نيوتن لـ $\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha}$ ومنشور لوران للتابع $f(z)$ في جوار اللانهاية نعوض ونحصل على نفس النتيجة.

ملاحظـة: في حالـة خاصـة إذا كانـت $z = \infty$ صـفراً مـن المرتبـة الثانيـة للتـابع $f(z)$، أي إن:

$$c_0 = 0 \quad \text{and} \quad c_{-1} \neq 0$$

فعندئذ يكون:

$$Res_{z=\infty} f_1(z) = -e^{\alpha\pi i}.\, c_{-1}$$

الحالة السابعة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

وهي حساب التكاملات من الشكل:

$$\mathbf{I = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha}.\, f(x)dx \quad ; \quad -1 < \alpha < 1}$$

وحيث α عدد حقيقي وليس صحيحاً و$\alpha \neq 0$ وأما $f(x)$ فهو أيضاً تابع كسري نظامي والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن أقطاب، وهذه الأقطاب لاتنتمي للمجال $[-1, +1]$ وبناءً على هذه الشروط يكون التكامل I متقارباً.

إن الطريقة المستخدمة في حساب التكامل في الحالة السادسة يمكن تطبيقها مباشرةً دون أي تعديل على التكامل في الحالة السابعة لكن في هذه الحالة لنبرهن أن:

$$Res_{z=\infty} f_1(z) = -e^{\alpha\pi i}.\, (\alpha.\, c_0.\, (b-a) + c_{-1})$$

البرهان:

لدينا $h(z) = \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha}$ ومنه:

$$h(z) = |h(z)|.\, e^{i\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

وبحيث φ_1 و φ_2 موضحان في الحالة السادسة.

ومن ثم فإن:

$$|h(z)|.\, e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)} = \left|\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha}\right|.\, e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)}$$
$$= |(z-a)^{\alpha}.\, (b-z)^{-\alpha}|.\, e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$= \left|z^{\alpha}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\alpha}.z^{-\alpha}.(-1)^{-\alpha}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{-\alpha}\right|.e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)} =$$

$$= \left|\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\alpha}.\left(1-\frac{b}{z}\right)^{-\alpha}\right|.e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)}$$

وباستخدام منشور الكرخي نيوتن لكل من:

$\left(1-\frac{b}{z}\right)^{-\alpha}$ و $\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\alpha}$ نحصل على:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z) = -e^{\alpha\pi i}.(\alpha.c_0.(b-a)+c_{-1})$$

وهو المطلوب.

البرهان بطريقة أخرى:

لدينا:

$$h(z) = \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha} = \left(\frac{z-a}{z-b}.(-1)\right)^{\alpha} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}.(-1)^{\alpha}$$

$$= (z-a)^{\alpha}.(z-b)^{-\alpha}.e^{\alpha\pi i} = \left(1-\frac{a}{z}\right)^{\alpha}.\left(1-\frac{b}{z}\right)^{-\alpha}.e^{\alpha\pi i}$$

ولكن بحسب الكرخي نيوتن يكون:

$$\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\alpha} = 1-\frac{a.\alpha}{z}+\frac{a^2.\alpha.(\alpha-1)}{z^2}+\cdots$$

$$\left(1-\frac{b}{z}\right)^{-\alpha} = 1+\frac{b.\alpha}{z}+\frac{b^2.\alpha.(\alpha+1)}{z^2}+\cdots$$

ومن ثمّ:

$$h(z) = \left(1-\frac{a.\alpha}{z}+\frac{a^2.\alpha.(\alpha-1)}{z^2}+\cdots\right).$$
$$\left(1+\frac{b.\alpha}{z}+\frac{b^2.\alpha.(\alpha+1)}{z^2}+\cdots\right).e^{\alpha\pi i}$$
$$= \left(1+\frac{b.\alpha}{z}-\frac{a.\alpha}{z}+\cdots\right).e^{\alpha\pi i}$$

ولكن كما نعلم:

$$f_1(z) = h(z).f(z) = \left(1 + \frac{b.\alpha}{z} - \frac{a.\alpha}{z} + \cdots\right).e^{\alpha\pi i}.\left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots\right); |z| > R$$

ومنه:

$$f_1(z) = \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_0.b.\alpha}{z} - \frac{c_0.a.\alpha}{z} + \cdots\right).e^{\alpha\pi i}$$
$$= \left(c_0 + \frac{c_0.\alpha.(b-a) + c_1}{z} + \cdots\right).e^{\alpha\pi i}$$

ويكون راسب الدالة $f_1(z)$ عند $z = \infty$ هي أمثال الحد $\frac{1}{z}$ مضروباً بناقص واحد ومن ثمّ:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f_1(z) = -e^{\alpha\pi i}.(\alpha.c_0.(b-a) + c_{-1})$$

وهو المطلوب.

مثال (١):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha.\frac{dx}{x+1} \; ; -1 < \alpha < +1$$

(يُطلب دراسة تفصيلية لهذا التكامل).

الحل:

إن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha.\frac{dx}{x+1} = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha.f(x)dx \quad ; f(x) = \frac{1}{x+1}$$

ونلاحظ أنه بالفرض $-1 < \alpha < +1$ كما أن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي عبارة عن أقطاب وغير واقعة ضمن المجال $[0,1]$ لأن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1$$

وهي قطب بسيط غير واقعة ضمن المجال المذكور ومن ثمَّ نحن أمام الحالة السادسة من حالات مبرهنة الرواسب.

لدينا $h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$ على الجزء العلوي للمقطع و $h(\tilde{x}) = e^{2\alpha\pi i}.\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$ على الجزء السفلي للمقطع والأكثر من ذلك يكون:

$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$ على الجزء السفلي للمقطع.

$f_1(x) = h(x).f(x)$ على الجزء العلوي للمقطع.

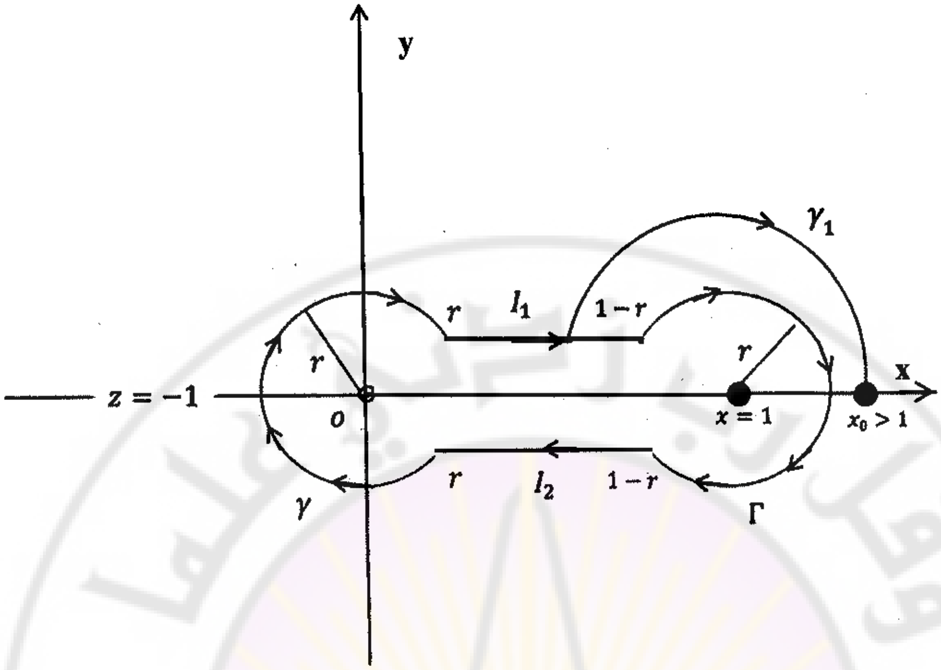
لنأخذ المنحني C المؤلف من دائرتين غير متحدتي المركز γ, Γ وبحيث:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z-1| = r$$

والقطعتين المستقيمتين الواصلتين بين هاتين الدائرتين والممتدتين على المحور الحقيقي.

$$I_1 : \quad r \le x \le 1 - r$$
$$I_2 : \quad 1 - r \le x \le r$$

بحيث تقع جميع أقطاب الدالة $f(z)$ خارج المنحني C أي القطب $z = -1$ يقع خارج المنحني C كما في الشكل التالي (شكل (١٧)).



الشكل (١٧)

ومن ثمَّ وبحسب مبرهنة الرواسب يكون:

$$I=\int_C f_1(z)\,dz = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z)+\mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z)] \quad \Rightarrow$$

$$\int_C f_1(z)\,dz=\int_\gamma f_1(z)\,dz+\int_{l_1} f_1(z)\,dz+\int_\Gamma f_1(z)\,dz+\int_{l_2} f_1(\tilde{z})\,dz$$
$$=2\pi i[\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z)+\mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z)] \;\Rightarrow$$

$$\int_\gamma f_1(z)\,dz+\int_r^{1-r} f_1(x)\,dx+\int_\Gamma f_1(z)\,dz+\int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$=2\pi i[\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z)+\mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z)] \;\Rightarrow$$

وبجعل $r\to 0$ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_0^1 f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_1^0 f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)]$$

ولكن بحسب المبرهنة (٢) من الفقرة (٢. ٩. ١٠) نجد أن التكاملين الأول والثالث من العلاقة السابقة معدومان وذلك عندما تسعى r إلى الصفر.

أي إن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz = 0$$

ومن ثم:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_1^0 f_1(\tilde{x})\,dx = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)] \Rightarrow$$
$$\int_0^1 f_1(x)\,dx - e^{2\pi\alpha i}\int_0^1 f_1(x)\,dx = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)] \Rightarrow$$
$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}}.[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)] \quad \dots (*)$$

لنحسب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند النقطة $z = -1$ التي هي عبارة عن قطب بسيط ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) = \lim_{z\to -1}(z+1).f_1(z) = \lim_{z\to -1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{\alpha}$$
$$= (-1)^{\alpha}.2^{-\alpha} = e^{\pi\alpha i}.2^{-\alpha}$$

لنحسب راسب التابع $f_1(z)$ عند $z = \infty$ ولكن الخطوات التي تم اتباعها في الدراسة النظرية لحساب الراسب عند هذه النقطة سوف نقوم بإعادتها كتطبيق:

الخطوة الأولى: نقوم بنشر التابع $f(z)=\frac{1}{z+1}$ في جوار اللانهاية بمتسلسلة لوران:

$$f(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}.\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\ ;\ |z|>1$$

الخطوة الثانية: ننشر التابع $h(z)=\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}$ في متسلسلة لوران في جوار اللانهاية ولكن

$h(z)$ يكتب بالشكل:

$$h(z)=h(\infty).g(z)$$

أما التابع $g(z)$ فهو:

$$g(z)=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\alpha}$$

ويكون بحسب منشور نيوتن:

$$g(z)=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\alpha}=1+\frac{\alpha}{z}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{z^2}+\cdots$$

أما بالنسبة لـ $h(\infty)$ فهو عبارة عن:

$$h(\infty)=e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)}$$

وبحيث $\varphi_1=\Delta_{\gamma_1}\arg(z)$ تزايد عُمدة z على طول الطريق γ_1

وبحيث $\varphi_2=\Delta_{\gamma_1}\arg(z-1)$ تزايد عُمدة $z-1$ على طول الطريق γ_1

وبحيث γ_1 هو طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية للمقطع بالنقطة $1<x_0$ كما هو موضح بالشكل (١٧) المرسوم أعلاه.

وبناءً على ذلك ومن الشكل (١٧) يكون لدينا:

$$\varphi_1=\Delta_{\gamma_1}\arg(z)=0\quad,\quad \varphi_2=\Delta_{\gamma_1}\arg(z-1)=-\pi$$

بالتعويض في عبارة $h(\infty)$ نجد:

$$h(\infty) = e^{i\alpha(\varphi_1-\varphi_2)} = e^{\alpha\pi i}$$

الخطوة الثالثة: نعلم أن: $f_1(z) = f(z).h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}.\frac{1}{z+1}$

ومن ثمّ يكون حسب ما وجدنا في الخطوتين الأولى والثانية ما يلي:

$$f_1(z) = f(z).h(z) = f(z).h(\infty).g(z)$$

$$= \left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\cdots\right).e^{\alpha\pi i}.\left(1+\frac{\alpha}{z}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{z^2}+\cdots\right)\ ;\ |z|>R \Rightarrow$$

$$f_1(z) = \left(\frac{1}{z}+\frac{\alpha}{z^2}+\cdots\right).e^{\alpha\pi i} = \left(\frac{1}{z}+\frac{\alpha}{z^2}+\cdots\right).e^{\alpha\pi i}\ \ ;|z|>R$$

الخطوة الرابعة والأخيرة: الراسب عند $z=\infty$ للتابع $f_1(z)$ هو عبارة عن أمثال الحد $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران مضروباً بإشارة ناقص وبالتالي نجد:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z) = -e^{\alpha\pi i}$$

بالعودة إلى (*) نجد أن:

$$I=\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}.\frac{dx}{1+x} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.\left[e^{\pi\alpha i}.2^{-\alpha} - e^{\alpha\pi i}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}.e^{\pi\alpha i}(2^{-\alpha}-1) =$$

$$\frac{2\pi i}{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}(1-2^{-\alpha}) = \frac{\pi.(1-2^{-\alpha})}{\frac{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}{2i}} = \frac{\pi.(1-2^{-\alpha})}{\sin\pi\alpha}$$

مثال (٢):

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[4]{(1-x).(x+1)^3}}{x^2+1}dx$$

الحل:

ليكن $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ نلاحظ أن $f(z)$ لايملك أقطاباً واقعة في المجال $[-1,+1]$ وذلك لأن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = i\ ,\ z_2 = -i$ وهي أقطاب بسيطة ولا تقع ضمن المجال المذكور ومن ثمّ التكامل I متقارب.

لدينا $h(z) = \sqrt[4]{(1-z).(z+1)^3}$

لنعزل في المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال [-1, +1] فرعاً تحليلياً $h(z)$ موجباً على الجزء العلوي للمقطع وبحيث:

$h(x) = \sqrt[4]{(1-x).(x+1)^3}\ \ ;\ -1 < x < +1$ على الجزء العلوي للمقطع.

$h(\tilde{x}) = h(x - i_0) = e^{\frac{3\pi}{2}i}.h(x) = -i.h(x)$ على الجزء السفلي للمقطع.

ويكون:

$f_1(x) = h(x).f(x) = \frac{\sqrt[4]{(1-x).(x+1)^3}}{x^2+1}$ (على الجزء العلوي للمقطع).

$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = e^{\frac{3\pi}{2}i} \cdot h(x) \cdot f(x) = -if_1(x)$ (على الجزء السفلي للمقطع).

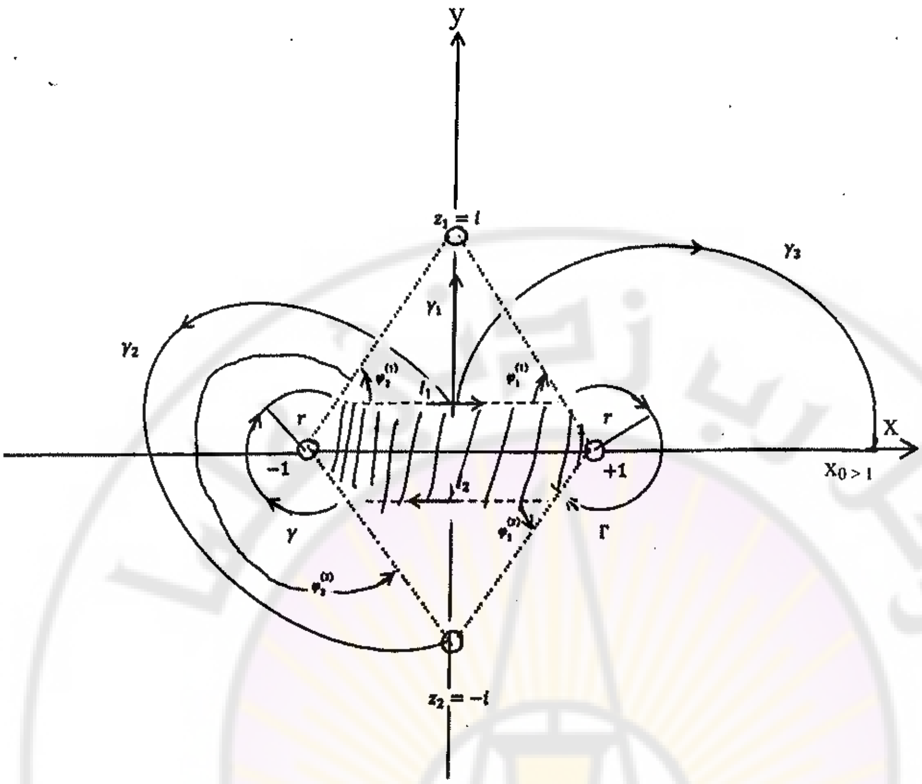
لنأخذ المنحني C المكون من الدائرتين γ, Γ غير متحدتي المركز وبحيث :

$$\gamma : |z+1| = r \quad , \quad \Gamma : |z-1| = r$$

والقطعتين المستقيمتين الواصلة بين هاتين الدائرتين والممتدتين على المحور الحقيقي أي المجالين:

$$I_1 = \{-1 + r \le x \le 1 - r\}$$
$$I_1 = \{1 - r \le x \le -1 + r\}$$

وبحيث إن جميع أقطاب الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ تقع خارج المنحني C كما في الشكل التالي:



الشكل (١٨)

ملاحظة هامة حول الشكل السابق:

إن القطعتين المستقيمتين I_1 و I_2 منطبقتان على المحور الحقيقي، ولكن تم رسمهما بهذا الشكل للتوضيح.

القطعة I_1 تسمى الجزء العلوي (للمقطع).

القطعة I_2 تسمى الجزء السفلي (للمقطع).

ويكون:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1) \quad , \quad \varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(1+z)$$
$$\varphi_1^{(2)} = \Delta_{\gamma_2} \arg(z-1) \quad , \quad \varphi_2^{(2)} = \Delta_{\gamma_2} \arg(1+z)$$

$$\varphi_1^{(3)} = \Delta_{\gamma_3} \arg(z-1) \quad , \qquad \varphi_2^{(3)} = \Delta_{\gamma_3} \arg(1+z)$$

وبحيث:

γ_1 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية بالنقطة $z_1 = i$

γ_2 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية بالنقطة $z_2 = -i$

γ_3 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية بالنقطة $x_0 > 1$.

وبحيث أيضاً:

$\varphi_1^{(1)}$ مقدار زاوية دوران الشعاع $(z-1)$ عندما ترسم النقطة $(z-1)$ الطريق γ_1 من بدايته إلى نهايته التي تسمى بتغير عمدة $(z-1)$ على طول الطريق γ_1 .

$\varphi_2^{(1)}$ مقدار زاوية دوران الشعاع $(1+z)$ عندما ترسم النقطة $(1+z)$ الطريق γ_1 من بدايته إلى نهايته التي تسمى بتغير عمدة $(1+z)$ على طول الطريق γ_1 .

$\varphi_1^{(2)}$ مقدار زاوية دوران الشعاع $(z-1)$ عندما ترسم النقطة $(z-1)$ الطريق γ_2 من بدايته إلى نهايته التي تسمى بتغير عمدة $(z-1)$ على طول الطريق γ_2 .

$\varphi_2^{(2)}$ مقدار زاوية دوران الشعاع $(1+z)$ عندما ترسم النقطة $(1+z)$ الطريق γ_2 من بدايته إلى نهايته التي تسمى بتغير عمدة $(1+z)$ على طول الطريق γ_2 .

$\varphi_1^{(3)}$ مقدار زاوية دوران الشعاع $(z-1)$ عندما ترسم النقطة $(z-1)$ الطريق γ_3 من بدايته إلى نهايته التي تسمى بتغير عمدة $(z-1)$ على طول الطريق γ_3 .

$\varphi_2^{(3)}$ مقدار زاوية دوران الشعاع $(1+z)$ عندما ترسم النقطة $(1+z)$ الطريق γ_3 من بدايته إلى نهايته التي تسمى بتغير عمدة $(1+z)$ على طول الطريق γ_3 .

لنأخذ التابع المستكمل $f_1(z) = h(z).f(z) = \frac{\sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3}}{z^2+1}$ وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C \frac{\sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3}}{z^2+1}\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

وحسب النتيجة التي حصلنا عليها من مبرهنة كوشي (التكامل على المنحني الخارجي يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية) ومن ثمَّ يكون:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_1} f_1(z)\,dz + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_2} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \Rightarrow$$
$$\int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_{-1+r}^{1-r} f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{1-r}^{-1+r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \Rightarrow$$

وبأخذ r أصغر مايمكن أي بجعل $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f_1(z)\,dz + \lim_{r\to 0}\int_{-1+r}^{1-r} f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_\Gamma f_1(z)\,dz + \lim_{r\to 0}\int_{1-r}^{-1+r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

ولكن بحسب المبرهنة رقم (٢) في الفقرة (٢-٩-١٠) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الأول والثالث يسعيان إلى الصفر عندما $r \to 0$ وذلك كون التابع $f_1(z)$ محدوداً والأكثر من ذلك نلاحظ أن التابع $f_1(z)$ تحليلي عند النقطة $z = 0$.

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)\,d + \int_{1}^{-1} f_1(\tilde{x})\,dx =$$

$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

ومن ثم فإنَّ:

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx + \int_{1}^{-1} -i.f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx + i\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx$$

$$= (1+i).\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx$$

$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1+i}.\left[\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \quad \ldots(*)$$

لنقوم بحساب الرواسب للتابع $f_1(z) = \frac{\sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3}}{z^2+1}$ عند كل من:

$$z_1 = i \quad , \quad z_2 = -i \quad , \quad z = \infty$$

بما أن $z_1 = i$ و $z_2 = -i$ هما عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) = \lim_{z\to i}(z-i).f_1(z) = \lim_{z\to i}(z-i).h(z).f(z)$$

$$= \lim_{z\to i}(z-i).h(z).\frac{1}{(z+i).(z-i)} = \lim_{z\to i}\frac{h(z)}{(z+i)}$$

$$= \left[\frac{h(z)}{z+i}\right]_{z=i} = \frac{h(i)}{2i}$$

ولكن:

$$h(i) = |h(i)|.e^{i\alpha\varphi} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{4} \quad , \quad \varphi = \varphi_1^{(1)} + 3\varphi_2^{(1)} \ldots(**)$$

وحيث $\varphi_1^{(1)}$ و $\varphi_2^{(1)}$ معرفان سابقاً وبحسب الشكل (١٨) يكون:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1}\arg(z-1) = \frac{-\pi}{4} \quad , \quad \varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1}\arg(z+1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{4} + 3\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$|h(i)| = \left|\sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3}\right|_{z=i} = |1-i|^{\frac{1}{4}}.|1+i|^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}.2^{\frac{3}{8}} = \sqrt{2}$$

وبتعويض ما حصلنا عليه في (**) نجد أن:

$$h(i) = |h(i)|.e^{i\alpha\varphi} = \sqrt{2}.e^{i\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{8}}$$

وبتعويض الأخيرة في عبارة الراسب نجد أن:

$$Res_{z=i}f_1(z) = \frac{h(i)}{2i} = \frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{8}}}{2i}$$

حساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند $z=-i$.

$$Res_{z=-i}f_1(z) = \lim_{z\to -i}(z+i).f_1(z) = \lim_{z\to -i}(z+i).h(z).f(z)$$
$$= \lim_{z\to -i}(z+i).h(z).\frac{1}{(z+i).(z-i)} = \lim_{z\to -i}\frac{h(z)}{(z-i)}$$
$$= \left[\frac{h(z)}{z-i}\right]_{z=-i} = \frac{h(-i)}{-2i}$$

ولكن:

$$h(-i) = |h(-i)|.e^{i\alpha\varphi} \;\; ; \; \alpha = \frac{1}{4}, \varphi = \varphi_1^{(2)} + 3\varphi_2^{(2)} \;...(***)$$

وحيث $\varphi_1^{(2)}$ و $\varphi_2^{(2)}$ معرفان سابقاً ومن الشكل (١٨) نجد أن:

$$\varphi_1^{(2)} = \Delta_{\gamma_2}\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}\,,$$
$$\varphi_2^{(2)} = \Delta_{\gamma_2}\arg(z+1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + 3\,\frac{7\pi}{4} = \frac{22\pi}{4} = \frac{11\pi}{2}$$
$$|h(-i)| = \left|\sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3}\right|_{z=-i} = \sqrt{2}$$

وبتعويض ما حصلنا عليه في (***) نجد أن:

$$h(-i) = |h(-i)|.e^{i\alpha\varphi} = \sqrt{2}.e^{i\frac{1}{4}\cdot\frac{11\pi}{2}} = \sqrt{2}.e^{i\frac{11\pi}{8}}$$

وبتعويض الأخيرة في عبارة الراسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-i} f_1(z) = \frac{h(-i)}{-2i} = \frac{\sqrt{2}.\, e^{i\frac{11\pi}{8}}}{-2i}$$

حساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند $z = \infty$.

لدينا: $f_1(z) = h(z).f(z) = \sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3}.\frac{1}{z^2+1}$

$$h(z) = \sqrt[4]{(1-z).(1+z)^3} = (1-z)^{\frac{1}{4}}.(1+z)^{\frac{3}{4}}$$

وإذا فرضنا أن: $h_1(z) = \frac{h(z)}{z} = h_1(\infty).\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{4}}$

إن العملية السابقة فقط لكي نُدخل مفهوم تزايد العمدة في إيجاد الراسب للتابع $f_1(z)$ عند اللانهاية.

ومن ثمّ أصبح لدينا:

$$h_1(z) = h_1(\infty).\, g(z)$$

وحيث $g(z) = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{4}}$ وهو تابع تحليلي كما نعلم في النقطة $z = \infty$ ويكون $g(\infty) = 1$ والأكثر من ذلك:

$$h_1(\infty) = e^{i\alpha\varphi} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{4} \quad , \quad \varphi = \varphi_1^{(3)} + 3\varphi_2^{(3)}$$

وحيث φ_1 و φ_2 معرفان سابقاً ويكون لدينا من الشكل (١٨) ما يلي:

$$\varphi_1^{(3)} = \Delta_{\gamma_3} \arg(z-1) = -\pi \quad , \quad \varphi_2^{(3)} = \Delta_{\gamma_3} \arg(z+1) = 0 \Rightarrow \varphi = -\pi$$

وحيث γ_3 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية للمقطع بالنقطة $x_0 > 1$ كما هو موضح بالشكل (١٨).

أما بالنسبة لـ $g(z)$ فحسب منشور الكرخي نيوتن نجد أن:

$$g(z)=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(1-\frac{1}{4z}+\cdots\right).\left(1+\ \frac{3}{4z}+\cdots\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2z}+\cdots\right)\quad \left(\text{نكتفي بأول حدين}\right)$$

ومن ثمَّ أصبح لدينا:

$$h_1(z)=\frac{h(z)}{z}=e^{\frac{-\pi}{4}i}.\left(1+\frac{1}{2z}+\cdots\right)\ \Rightarrow h\ (z)=e^{\frac{-\pi}{4}i}.z.\left(1+\frac{1}{2z}+\cdots\right)$$
$$=e^{\frac{-\pi}{4}i}.\left(z+\frac{1}{2}+\cdots\right)$$

لنقم بنشر التابع $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ في جوار اللانهاية بمتسلسلة لوران فيكون النشر بالشكل:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z^2}.\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}.\left(1-\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$
$$=\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\cdots\right)\quad ;\quad |z|>1$$

بالعودة إلى $f_1(z)$ يكون لدينا التالي:

$$f_1(z)=h(z).f(z)=e^{\frac{-\pi}{4}i}.\left(z+\frac{1}{2}+\cdots\right).\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\cdots\right)=$$
$$e^{\frac{-\pi}{4}i}.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z^4}+\cdots\right)\quad ;\quad |z|>1$$

وكما نعلم يكون الراسب للتابع $f_1(z)$ عند $z=\infty$ هو أمثال الحد $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران مضروباً بإشارة ناقص ومن ثمَّ يكون:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z)=-e^{\frac{-\pi}{4}i}$$

بتعويض الرواسب التي حصلنا عليها في العبارة (*) نجد أن:

$$\int_{-1}^{1}f_1(x)\,dx=\frac{2\pi i}{1+i}.\left[\frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{8}}}{2i}-\frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{11\pi}{8}}}{2i}-e^{\frac{-\pi}{4}i}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}}.\left[\frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{8}}}{2i} - \frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{11\pi}{8}}}{2i} - e^{\frac{-\pi}{4}i}\right]$$

$$= \sqrt{2}\pi i.\left[\frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{8}}.e^{\frac{-\pi}{4}i}}{2i} - \frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{11\pi}{8}}.e^{\frac{-\pi}{4}i}}{2i} - e^{\frac{-\pi}{4}i}.e^{\frac{-\pi}{4}i}\right]$$

$$= \sqrt{2}\pi i.\left[\frac{\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{8}i}}{2i} - \frac{\sqrt{2}.e^{\frac{9\pi}{8}i}}{2i} - e^{\frac{-\pi}{2}i}\right] = \sqrt{2}\pi i.\left[\frac{\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{8}i}}{2i} + \frac{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{8}i}}{2i} + i\right]$$

$$= \sqrt{2}\pi.\left[\frac{\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{8}i} + \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{8}i}}{2} - 1\right] = \sqrt{2}\pi.\left[\sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{8} - 1\right] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[4]{(1-x).(1+x)^3}}{x^2+1}dx = \sqrt{2}\pi.\left[\sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{8} - 1\right]$$

مثال (٣):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}.\frac{1}{(2+x)^2}dx$$

(يطلب إجراء دراسة تفصيلية).

الحل:

إن التكامل السابق يكتب بالشكل التالي:

$$\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}.\frac{1}{(2+x)^2}dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{1}{(2+x)^2}dx$$

والأخيرة هي عبارة عن تكامل من الشكل التالي:

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}.f(x)dx$$

ونلاحظ أن $-1 < \alpha = \frac{-1}{2} < 1$ عدد حقيقي وليس صحيحاً والأكثر من ذلك نلاحظ أن $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$ هو تابع كسري عادي نظامي والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ الناتج عن التابع $f(x)$ بتبديل كل x بالمتحول المركب z هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(2+z)^2 = 0 \Rightarrow 2+z = 0 \Rightarrow z = -2$$

وهي عبارة عن قطب من المرتبة الثانية وغير واقعة على المجال $[0,1]$، ونلاحظ أن جميع الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ في الحالة السادسة محققة ومن ثمَّ التكامل I المعطى بالفرض متقارب وهو تكامل من الحالة السادسة من تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لنعزل (لنفصل) في المستوي العقدي فرعاً تحليلياً من فروع التابع $\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}}$ باستثناء القطع على طول المجال $[0,1]$ وبحيث يكون موجباً على الجزء العلوي للمقطع ونرمز لهذا الفرع بالرمز:

$$h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

وعندها يكون:

$$0 < h(z) = h(x+i0) = h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{-1}{2}} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

على الجزء العلوي للمقطع أما على الجزء السفلي للمقطع فيكون:

$$h(z) = h(x-i0) = h(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}.h(x) = e^{2\pi\left(\frac{-1}{2}\right)i}.h(x) = -h(x)$$

وبناءً على ذلك يكون لدينا:

$f_1(x) = h(x).f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{1}{(x+2)^2}$ على الجزء العلوي للمقطع.

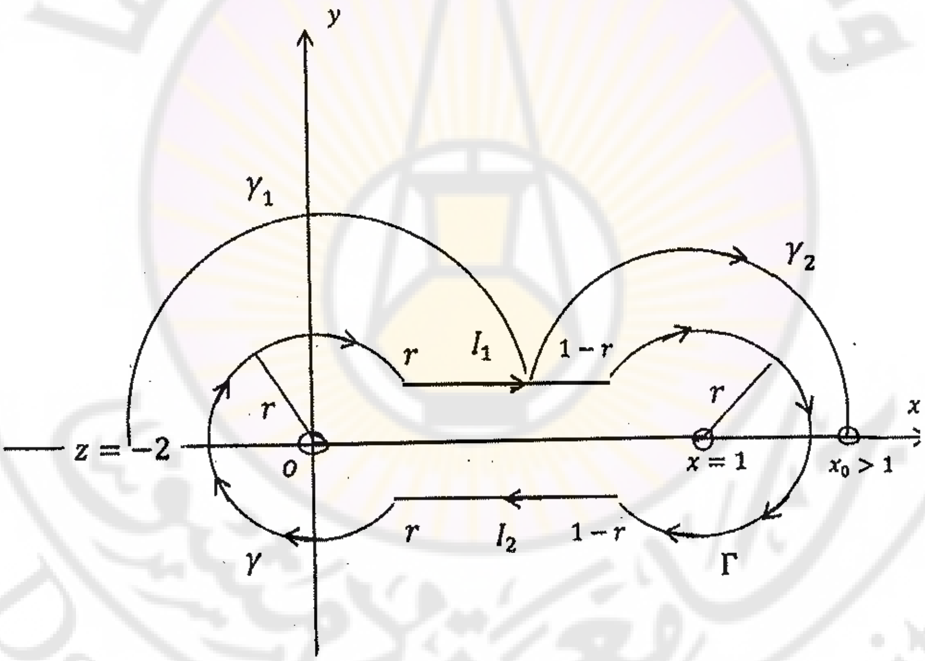
$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = -h(x).f(x) = -f_1(x) = -\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{1}{(x+2)^2}$$

وذلك على الضفة السفلية (الجزء السفلي للمقطع).

لنأخذ المحيط C المؤلف من الدائرتين γ, Γ غير المتحدتين بالمركز وبحيث مركز الدائرة γ هو الصفر ونصف قطرها r ومركز الدائرة Γ هو الواحد ونصف قطرها r والقطعتين المستقيمتين الواصلتين بين هاتين الدائرتين أي المجالين I_1 , I_2 أي لنأخذ:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z-1| = r$$
$$I_1 = \{ r \le x \le 1-r \} \quad , \quad I_2 = \{ 1-r \le x \le r \}$$

وبحيث تكون r أصغر مايمكن أي نجعل $r \to 0$ وبحيث جميع أقطاب الدالة $f(z)$ تقع داخل المنحني C أي القطب $z = -2$ يقع داخل C وفق الشكل التالي: (الشكل (١٩)).



الشكل (١٩)

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_{C} f_1(z)\,dz = 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

وبحيث $f_1(z) = h(z).f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}}.\frac{1}{(2+z)^2}$ وبناءً على النتيجة من مبرهنة كوشي يكون لدينا:

$$\int_{C} f_1(z)\,dz = \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{I_1} f_1(z)\,dz + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{I_2} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \Rightarrow$$
$$\int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{r}^{1-r} f_1(x)\,dx + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

بجعل $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \lim_{r\to 0}\int_{r}^{1-r} f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \lim_{r\to 0}\int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

ولكن بحسب المبرهنة رقم (٢) في (٢. ٩-١٠) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الأول والثالث يسعيان إلى الصفر عندما $r \to 0$ وبالتالي نجد أن:

$$\int_{0}^{1} f_1(x)\,d + \int_{1}^{0} f_1(\tilde{x})\,dx = \left[\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

ولكن وجدنا سابقاً أن:

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = -f_1(x)$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_1^0 -f_1(x)\,dx = \int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_0^1 f_1(x)\,dx$$
$$= [\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)] \Rightarrow$$
$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \pi i.[\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)] \quad \dots (*)$$

لنقم بحساب الرواسب للتابع $f_1(z) == \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}} . \frac{1}{(2+z)^2}$ عند كل من:

$$z = -2 \qquad , \qquad z = \infty$$

بما أن $z = -2$ هي عبارة عن قطب مرتبة ثانية ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to-2} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [(z+2)^2 . f_1(z)]$$
$$= \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz} [(z+2)^2 . h(z) . f(z)]$$
$$= \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz} \left[(z+2)^2 . h(z) . \frac{1}{(z+2)^2}\right] = \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz} [h(z)]$$
$$= [h'(z)]_{z=-2} = h'(-2)$$

ولكن:

$$h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow h'(z) = \frac{-1}{2} . \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) . \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-3}{2}} =$$
$$\frac{-1}{2} . \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) . \left(\frac{z}{1-z}\right)^{-1} . \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{-1}{2} . \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) . \frac{1-z}{z} . h(z)$$
$$= \frac{-h(z)}{2z(1-z)} \Rightarrow h'(-2) = \frac{-h(-2)}{-4(3)} = \frac{h(-2)}{12} \quad \dots (**)$$

ولكن:

$$h(-2) = |h(-2)| . e^{i\alpha\varphi} \;;\; \alpha = \frac{-1}{2} \quad , \varphi = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)} \dots (***)$$

وحيث:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z) \quad , \quad \varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1)$$

وحيث γ_1 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية بالنقطة $z = -2$ كما هو موضح بالشكل (١٩) أعلاه وكما نلاحظ وبحسب الشكل يكون بدينا:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z) = \pi \quad , \quad \varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1) = 0 \;\Rightarrow \varphi = \pi$$

$$|h(-2)| = \left|\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-1}{2}}\right|_{z=-2} = \left|\frac{-2}{3}\right|^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

وبتعويض ما حصلنا عليه في (***) نجد أن:

$$h(-2) = |h(-2)|.\,e^{i\alpha\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}}.\,e^{i\frac{-1}{2}.\pi} = -i.\sqrt{\frac{3}{2}}$$

وبتعويض الأخيرة في (**) نجد أن:

$$h'(-2) = \frac{h(-2)}{12} = \frac{-i.\sqrt{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{-i\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}$$

وأخيراً بالتعويض في عبارة الراسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-2} f_1(z) = h'(-2) = \frac{-i\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}$$

حساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند $z = \infty$.

بعد الدراسة النظرية الطويلة التي قمنا بدراستها لحساب الراسب عند $z = \infty$ للتابع $f_1(z)$ التي أتممناها سابقاً بعدة خطوات لا بُد من إعادتها في هذا المثال، لأنها مطلوبة في دراسة كل تمرين مطروح، هذا من جهة، ومن جهة أخرى سوف أقوم بمتابعة حل التمرين، وذلك بفرض أننا أتممنا عملية التفصيل لحساب الراسب كي لا يكون هناك تكرار، ولاحظنا بعد الدراسة التفصيلية أن:

$$\text{Res}_{z=\infty} f_1(z) = -e^{\pi\alpha i}.[\alpha. c_0 + c_{-1}]$$

وحيث $\alpha = -\frac{1}{2}$ معروفة لدينا و c_0 الحد الثابت في متسلسلة لوران للتابع $f(z) = \frac{1}{(2+z)^2}$ في جوار اللانهاية و c_{-1} أمثال الحد $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ أيضاً في جوار اللانهاية، والآن لنقم بنشر التابع $f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$ بجوار اللانهاية:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{(z+2)}.\frac{1}{(z+2)} = \frac{1}{z^2}.\frac{1}{1+\frac{2}{z}}.\frac{1}{1+\frac{2}{z}} =$$

$$\frac{1}{z^2}.\left(1-\frac{2}{z}+\cdots\right).\left(1-\frac{2}{z}+\cdots\right) = \frac{1}{z^2}.\left(1-\frac{4}{z}+\frac{4}{z^2}+..\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \cdots \;\; ; \;\; |z| > 2$$

ونلاحظ أن:

$$c_0 = c_{-1} = 0 \;\Rightarrow\; \text{Res}_{z=\infty} f_1(z) = 0$$

بتعويض الرواسب التي حصلنا عليها في العبارة (*) نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \pi i.\left[\frac{-i\sqrt{3}}{12\sqrt{2}} + 0\right] = \frac{\pi\sqrt{3}}{12\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{6}} \quad \Rightarrow$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}.\frac{1}{(2+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}$$

مثال (٤):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x.(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx$$

الحل:

طريقة أولى: إن التكامل السابق يكتب بالشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x.(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{4}}.(1-x)^{\frac{3}{4}}}{(1+x)^3}dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{4}}.(1-x)^{\frac{-1}{4}}.(1-x)}{(1+x)^3}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1-x}{(1+x)^3}dx$$

والأخيرة هي تكامل من الشكل التالي:

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}.f(x)dx$$

ونلاحظ أن $-1 < \alpha = \frac{1}{4} < 1$ عدد حقيقي وليس صحيحاً والأكثر من ذلك نلاحظ أن $f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3}$ هو تابع كسري عادي نظامي والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ الناتج عن التابع $f(x)$ بتبديل كل x بالمتحول المركب z هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(1+z)^3 = 0 \Rightarrow 1+z = 0 \Rightarrow z = -1$$

وهي عبارة عن قطب من المرتبة الثالثة وغير واقعة على المجال $[0,1]$، ونلاحظ أن جميع الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ محققة، وبالتالي التكامل I متقارب ونحن أمام الحالة السادسة من تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لنعزل (لنفصل) في المستوي العقدي فرعاً تحليلياً من فروع التابع $\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}}$ باستثناء القطع على طول المجال $[0,1]$ وبحيث يكون موجباً على الجزء العلوي للمقطع ونرمز لهذا الفرع بالرمز:

$$h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}}$$

وعندها يكون:

$$h(z) = h(x+i0) = h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

على الجزء العلوي للمقطع, وعلى الجزء السفلي للمقطع، يكون لدينا:

$$h(z) = h(x - i0) = h(\tilde{x}) = e^{2\pi\alpha i}.h(x) = e^{2\pi\left(\frac{1}{4}\right)i}.h(x) = i.h(x)$$

علاوة على ذلك:

$f_1(x) = h(x).f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}.\frac{1-x}{(x+1)^3}$ على الجزء العلوي للمقطع.

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = i.h(x).f(x) = i.f_1(x) = i.\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}.\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

وذلك على الجزء السفلي للمقطع.

لنأخذ المحيط C المؤلف من الدائرتين γ, Γ غير المتحدتين بالمركز وبحيث مركز الدائرة γ هو الصفر ونصف قطرها r ومركز الدائرة Γ هو الواحد ونصف قطرها r والقطعتين المستقيمتين الواصلتين بين هاتين الدائرتين أي المجالين I_1 , I_2 أي لنأخذ:

$$\gamma : |z| = r \quad , \quad \Gamma : |z - 1| = r$$
$$I_1 = \{ r \le x \le 1 - r\} \quad , \quad I_2 = \{ 1 - r \le x \le r\}$$

وبحيث نجعل $r \to 0$ وبحيث جميع أقطاب الدالة $f(z)$ تقع داخل المنحني C أي القطب $z = -1$ يقع داخل C وفق الشكل (١٩) نفسه في المثال السابق مع مراعاة تغيير النقطة الشاذة أي بدل $z = -2$ نضع $z = -1$.

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\, dz = 2\pi i.[\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty}f_1(z)]$$

وبحيث $f_1(z) = h(z).f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}}.\frac{1-z}{(1+z)^3}$ وبناءً على النتيجة من مبرهنة كوشي يكون لدينا:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_1} f_1(z)\,dz + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_2} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \Rightarrow$$

$$\int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^{1-r} f_1(x)\,dx + \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

بجعل $r \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f_1(z)\,dz + \lim_{r\to 0}\int_r^{1-r} f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_\Gamma f_1(z)\,dz + \lim_{r\to 0}\int_{1-r}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

ولكن بحسب المبرهنة رقم (٢) في (٢-٩-١٠) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الأول والثالث يسعيان إلى الصفر عندما $r \to 0$ ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,d + \int_1^0 f_1(\tilde{x})\,dx = 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

ولكن وجدنا سابقاً أن:

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = i.f_1(x)$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_1^0 i.f_1(x)\,dx = \int_0^1 f_1(x)\,dx - i\int_0^1 f_1(x)\,dx$$
$$= 2\pi i.\left[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-i}.\left[\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) + \mathrm{Res}_{z=\infty} f_1(z)\right] \quad \dots(*)$$

لنقم بحساب الرواسب للتابع $f_1(z) == \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}}.\frac{1-z}{(1+z)^3}$ عند كل من:

$$z = -1 \qquad , \qquad z = \infty$$

بما أن $z = -1$ هي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} [(z+1)^3 . f_1(z)]$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2} [(z+1)^3 . h(z) . f(z)]$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+1)^3 . h(z) . \frac{1-z}{(z+1)^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2} [h(z).(1-z)] =$$
$$\frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} [h'(z).(1-z) - h(z)] = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} [h''(z).(1-z) - 2h'(z)]$$
$$= \frac{1}{2} . [2. h''(-1) - 2h'(-1)] = h''(-1) - h'(-1)$$

ولكن:

$$h(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow h'(z) = \frac{1}{4} . \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) . \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{-3}{4}} =$$
$$\frac{1}{4} . \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) . \left(\frac{z}{1-z}\right)^{-1} . \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} . \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) . \frac{1-z}{z} . h(z)$$
$$= \frac{h(z)}{4z(1-z)} \Rightarrow h'(-1) = \frac{h(-1)}{-4(2)} = -\frac{h(-1)}{8} \quad ... (**)$$
$$h''(z) = \frac{d}{dz}[h'(z)] = \frac{d}{dz}\left[\frac{h(z)}{4z(1-z)}\right]$$
$$= \frac{h'(z).(4z - 4z^2) - h(z).(4 - 8z)}{(4z - 4z^2)^2}$$

ولكن وجدنا:

$h'(z) = \frac{h(z)}{4z(1-z)} = \frac{h(z)}{4z - 4z^2}$ بالتعويض في عبارة $h''(z)$ نجد أن:

$$h''(z) = \frac{\frac{h(z)}{4z-4z^2}.(4z-4z^2) - h(z).(4-8z)}{(4z-4z^2)^2}$$

$$= \frac{h(z) - 4.h(z) + 8z.h(z)}{(4z-4z^2)^2}$$

$$= \frac{8z.h(z) - 3.h(z)}{(4z-4z^2)^2} \Rightarrow h''(-1) = \frac{-11.h(-1)}{64} \quad ...(***)$$

ولكن:

$$h(-1) = |h(-1)|.e^{i\alpha\varphi}\ ;\ \alpha = \frac{1}{4}\ ,\varphi = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)} \ ...(****)$$

وحيث:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z) \quad , \quad \varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1)$$

وحيث γ_1 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية بالنقطة $z = -1$ كما هو موضح بالشكل (١٩) الموجود في المثال السابق مع مراعاة تغيير النقطة الشاذة وكما نلاحظ ومن الشكل يكون:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z) = \pi\ ,\varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1) = 0 \ \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$|h(-1)| = \left|\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{4}}\right|_{z=-1} = \left|\frac{-1}{2}\right|^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

وبالتعويض في (****) نجد أن:

$$h(-1) = |h(-1)|.e^{i\alpha\varphi} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وبتعويض الأخيرة في (***) و (**) نجد أن:

$$h''(-1) = \frac{-11.h(-1)}{64} = -\frac{11.\frac{1}{\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}}{64} = \frac{-11}{64.\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$h'(-1) = -\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}}{8} = -\frac{1}{8\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وبتعويض العبارتين الأخيرتين في عبارة الراسب نجد أن:

$$Res_{z=-1}f_1(z) = h''(-1) - h'(-1) = \frac{-11}{64.\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{1}{8\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$= \frac{-11}{64.\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{8}{64.\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{64.\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

حساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند $z = \infty$، وبأسلوب مشابه لما فعلناه في التمارين السابقة نجد:

$$Res_{z=\infty}f_1(z) = -e^{\pi\alpha i}.[\alpha.c_0 + c_{-1}]$$

وحيث $\alpha = \frac{1}{4}$ معروفة لدينا و c_0 الحد الثابت في متسلسلة لوران للتابع $f(z) = \frac{1-z}{(1+z)^3}$ في جوار اللانهاية و c_{-1} أمثال الحد $\frac{1}{z}$ في متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ أيضا في جوار اللانهاية

وفي مثالنا هذا أيضاً يكون:

$$c_0 = c_{-1} = 0 \Rightarrow Res_{z=\infty}f_1(z) = 0$$

بتعويض الرواسب التي حصلنا عليها في العبارة (*) نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-i}.\left[\frac{-3}{64.\sqrt[4]{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}} + 0\right] = \frac{2\pi i}{1-i}.\left[\frac{-3}{64.\sqrt[4]{2}}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= \frac{2\pi i}{1-i}.(1+i).\left[\frac{-3}{64.\sqrt[4]{8}}\right] = \frac{2\pi}{1-i}.(i-1).\left[\frac{-3}{64.\sqrt[4]{8}}\right] =$$
$$= -2\pi.\left[\frac{-3}{64.\sqrt[4]{8}}\right] = \frac{6\pi}{64.\sqrt[4]{8}} = \frac{3\pi}{64}.\sqrt[4]{2} \qquad \Rightarrow$$
$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x.(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx = \frac{3\pi}{64}.\sqrt[4]{2}$$

طريقة ثانية لإيجاد قيمة التكامل السابق:

ليكن $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$ نلاحظ أن $f(z)$ لا يملك أقطاباً واقعة في المجال $[0, +1]$ وذلك لأن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$(z + 1)^3 = 0 \Rightarrow z = -1$ وهي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة ولا تقع ضمن المجال المذكور ومن ثمّ التكامل I متقارب.

لنعزل في المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $[0,1]$ فرعاً تحليلياً للتابع $\sqrt[4]{z.(1-z)^3}$ موجباً على الجزء العلوي للمقطع وليكن:

$$h(z) = \sqrt[4]{z.(1-z)^3}$$

ويكون:

$h(x) = \sqrt[4]{x.(1-x)^3} \quad ; \ 0 < x < +1$ على الجزء العلوي للمقطع.

$h(\tilde{x}) = e^{2\pi\frac{1}{4}i}.h(x) = i.\sqrt[4]{x.(1-x)^3}$ على الجزء السفلي للمقطع.

ويكون:

$f_1(x) = h(x).f(x) = \frac{\sqrt[4]{x.(1-x)^3}}{(1+x)^3}$ على الجزء العلوي للمقطع.

$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = i.h(x).f(x) = i.\frac{\sqrt[4]{x.(1-x)^3}}{(1+x)^3}$ على الجزء السفلي للمقطع.

لنأخذ المنحني C المكون من الدائرتين γ, Γ غير متحدتي المركز وبحيث :

$$\gamma : |z| = r \quad , \ \Gamma : |z-1| = r$$

والقطعتين المستقيمتين الواصلة بين هاتين الدائرتين والممتدتين على المحور الحقيقي أي المجالين:

$$I_1 = \{ r \le x \le 1 - r \}$$
$$I_2 = \{ 1 - r \le x \le r \}$$

وبحيث إن جميع أقطاب الدالة $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$ تقع خارج المنحني C الذي هو ذات الشكل في المثال السابق مع مراعاة تغيير النقطة الشاذة.

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = 2\pi i.\left[Res_{z=-1} f_1(z) + Res_{z=\infty} f_1(z)\right]$$

وبحيث $f_1(z) = h(z).f(z) = \sqrt[4]{z.(1-z)^3}.\frac{1}{(1+z)^3}$ وباتباع نفس الخطوات في الطريقة الأولى دون تعديل نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-i}.\left[Res_{z=-2} f_1(z) + Res_{z=\infty} f_1(z)\right] \quad \dots (*)$$

لنقم بحساب الرواسب للتابع $f_1(z) = \sqrt[4]{z.(1-z)^3}.\frac{1}{(1+z)^3}$ عند كل من:

$$z = -1 \qquad , \qquad z = \infty$$

وهنا الاختلاف ما بين الطريقة الأولى وهذه الطريقة وهي حساب الرواسب.

بما أن $z = -1$ هي عبارة عن قطب مرتبة ثالثة ومن ثمّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$Res_{z=-1} f_1(z) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left[(z+1)^3.f_1(z)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^3.h(z).f(z)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^3.h(z).\frac{1}{(1+z)^3}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[h(z)\right] = \frac{h''(-1)}{2}$$

ولكن:

$$h(z) = (z.(1-z)^3)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow h'(z)$$
$$= \frac{1}{4}.\left((1-z)^3 - 3z.(1-z)^2\right).(z.(1-z)^3)^{\frac{-3}{4}} =$$

$$\frac{1}{4}.(1-z)^2(1-4z).(z.(1-z)^3)^{-1}.(z.(1-z)^3)^{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}.(1-z)^2(1-4z).\frac{1}{z.(1-z)^3}.h(z)$$

$$=\frac{(1-4z).h(z)}{4z(1-z)}=\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.h(z)\Rightarrow h'(z)=\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.h(z)$$

$$h''(z)=\frac{d}{dz}[h'(z)]=\frac{d}{dz}\left[\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.h(z)\right]$$

$$=\frac{-4.(4z-4z^2)-(1-4z).(4-8z)}{(4z-4z^2)^2}.h(z)+\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.h'(z)$$

ولكن وجدنا:

$$h'(z)=\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.h(z)$$

بالتعويض في عبارة $h''(z)$ نجد أن:

$$h''(z)=\frac{-4.(4z-4z^2)-(1-4z).(4-8z)}{(4z-4z^2)^2}.h(z)$$

$$+\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.\frac{(1-4z)}{4z-4z^2}.h(z)$$

$$=\frac{[-4.(4z-4z^2)-(1-4z).(4-8z)+(1-4z)^2]}{(4z-4z^2)^2}.h(z)\Rightarrow$$

$$h''(-1)=\frac{-3.h(-1)}{64}\quad ...(**)$$

ولكن:

$$h(-1)=|h(-1)|.e^{i\alpha\varphi}\ ;\ \alpha=\frac{1}{4}\ ,\varphi=\varphi_1^{(1)}+3\varphi_2^{(1)}\ ...(***)$$

وحيث:

$$\varphi_1^{(1)}=\Delta_{\gamma_1}\arg(z)\quad ,\quad \varphi_2^{(1)}=\Delta_{\gamma_1}\arg(z-1)$$

وحيث γ_1 طريق يصل بين نقطة من الضفة العلوية بالنقطة $z=-1$ كما هو موضح بالشكل (١٩) الموجود في المثال السابق مع مراعاة تغيير النقطة الشاذة وكما نلاحظ ومن الشكل يكون:

$$\varphi_1^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z) = \pi \ , \varphi_2^{(1)} = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1) = 0 \ \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$|h(-1)| = \left|\sqrt[4]{z.(1-z)^3}\right|_{z=-1} = |-8|^{\frac{1}{4}} = (8)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{8}$$

وبالتعويض في (***) نجد أن:

$$h(-1) = |h(-1)|.e^{i\alpha\varphi} = \sqrt[4]{8}.e^{i\frac{1}{4}.\pi} = \sqrt[4]{8}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وبتعويض الأخيرة في (**) نجد أن:

$$h''(-1) = \frac{-3.h(-1)}{64} = -\frac{3.\sqrt[4]{8}.e^{i\frac{\pi}{4}}}{64} = \frac{-3.\sqrt[4]{8}}{64}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وبتعويض العبارة الأخيرة في عبارة الراسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) = \frac{h''(-1)}{2} = \frac{\frac{-3.\sqrt[4]{8}}{64}.e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{-3.\sqrt[4]{8}}{128}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

حساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند $z=\infty$:

لدينا: $$f_1(z) = h(z).f(z) = \sqrt[4]{z.(1-z)^3}.\frac{1}{(z+1)^3}$$

أما التابع $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$ فإن $z=\infty$ هي عبارة عن صفر من المرتبة الثالثة للتابع $f(z)$ ومن ثمّ حسب المبرهنة رقم (٥) في (١-٢٤-٣) تكون لدينا العلاقة التقاربية التالية محققة:

$$\underset{z\to\infty}{f(z) \approx \frac{c_{-3}}{z^3}}$$

أما بالنسبة للتابع $h(z) = \sqrt[4]{z.(1-z)^3}$ فتكون لدينا العلاقة التقاربية التالية محققة:

$$\underset{z\to\infty}{h(z) \approx Az}$$

ومن ثمَّ:

$$f_1(z) = h(z).f(z) \underset{z\to\infty}{\approx} \frac{A.c_{-3}}{z^2}$$

ومن ثمَّ تكون لدينا $z = \infty$ هي عبارة عن صفر من المرتبة الثانية للتابع $f_1(z)$ وحسب المبرهنة (١) في (٢-٩-٩) وكون النقطة $z = \infty$ صفراً من المرتبة $k = 2 > 1$ فإن:

$$Res_{z=\infty} f_1(z) = 0$$

بتعويض الرواسب التي حصلنا عليها في العبارة (*) نجد أن:

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-i}.\left[\frac{-3.\sqrt[4]{8}}{128}.e^{i\frac{\pi}{4}} + 0\right] = \frac{2\pi i}{1-i}.\left[\frac{-3.(2)^{\frac{3}{4}}}{128}.e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{1-i}\cdot\left[\frac{-3}{64\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \text{بنفس الخطوات المتبعة في الأولى} = \frac{3\pi}{64}\cdot\sqrt[4]{2} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x.(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,dx = \frac{3\pi}{64}.\sqrt[4]{2}$$

الحالة الثامنة من تطبيقات مبرهنة الرواسب:

وهي حساب التكاملات من الشكل:

$$\mathbf{I = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.[\ln(x)]^m.f(x)\,dx \ldots(1)}$$

وبحيث ($\alpha \in R$ في الحالة العامة) وكذلك $m \geq 1$ عدد صحيح وواضح أنه إذا كانت $m = 0$ فإن التكامل (1) يؤول إلى تكامل من شكل الحالة الخامسة.

أي يصبح بالشكل:

$$I = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.f(x)\,dx \;...\; (1`)$$

والذي يمثل كما نعلم تحويل ميلين للتابع $f(x)$.

بالعودة ومتابعة الشروط على التابع $f(x)$ في الحالة الثامنة: وحيث $f(x)$ تابع كسري عادي نظامي وسنفرض أن التابع $f(z)$ الناتج عن تبديل كل x بالمتحول العقدي z يحقق جميع الشروط المفروضة عليه في الحالة الخامسة.

- إن التكامل (1) المذكور يتقارب إذا وفقط إذا كان التابع $f(z)$ لايملك أقطاباً على النصف الموجب من المحور الحقيقي، أي لايملك أقطاباً واقعة على المجال $]0,+\infty[$ كذلك يحقق الشرطين التاليين المعروفين من الحالة الخامسة وهما:

$$\lim_{z\to 0}|z|^{\alpha}.f(z) = 0 \;...(2) \qquad , \qquad \lim_{z\to\infty}|z|^{\alpha}.f(z) = 0 \;...(3)$$

كذلك $z = 0$ ليست صفراً وليست قطباً للتابع $f(z)$ فنتيجة الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ الآنفة الذكر نجد مثلاً أن الشرط (2) يتحقق إذا وفقط إذا كانت $\alpha > 0$.

ومن أجل الشرط (3) فإنه يتحقق إذا وفقط إذا كانت $k - \alpha > 0$ أي إذا كانت $k > \alpha$ وحيث k تتعين من العلاقة التقاربية التالية:

$$\underset{z\to\infty}{f(z) \cong \frac{c_{-k}}{z^{k}}}$$

وهذه العلاقة التقاربية تتحقق إذا وفقط إذا كانت $z = \infty$ صفراً من المرتبة k للتابع $f(z)$، وعلاوةً على ذلك سنعتبر كما في الحالة الخامسة أن $f(0) \neq 0$ ليست صفراً وليست قطباً للتابع $f(z)$.

ضمن جميع هذه الشروط يكون التكامل (1) متقارباً، ولكن السؤال الذي يطرح نفسه ما وضع الحد اللوغارتمي بالنسبة للتكامل (1) ؟

فنقول إن العامل (الحد) اللوغارتمي لا يؤثر في عملية التقارب للتكامل (1).

وإضافةً إلى ذلك يمكننا الحصول على التكامل (1) من التكامل $(1')$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للوسيط α عدد من المرات ومساوية ل m مرة أي:

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.[\ln(x)]^m.f(x)dx$$

مهمتنا الآن الحصول على قيمة التكامل (1) وذلك باستخدام مبرهنة الرواسب. وجوهر الموضوع هو إيجاد فرع تحليلي في الساحة العقدية.

باعتبار D هي المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المجال $]0,+\infty[$ وبأخذ: $h(z)=z^{\alpha-1}$ هو الفرع التحليلي للتابع $z^{\alpha-1}$ الذي يأخذ قيماً موجبة على الجزء العلوي للمقطع ويكون:

$h(z)=h(x+i0)=h(x)=x^{\alpha-1}\ ;\ x>0$ على الجزء العلوي للمقطع

$h(z)=h(x-i0)=h(\tilde{x})=e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}\ ;\ x>0$ على الجزء السفلي للمقطع.

لنثبت فرعاً تحليلياً من فروع التابع اللوغارتمي، فنأخذ مثلاً الفرع الذي يأخذ قيماً حقيقية على الجزء العلوي للمقطع ونرمز له بالرمز $\ln(z)$ وعليه يكون في الساحة D ما يلي:

$$\ln(z)=\ln|z|+i.\arg(z)\quad ;\quad \forall z\in D\quad ,\quad 0<\arg(z)<2\pi$$

وبناءً على ذلك يكون على الجزء العلوي للمقطع:

$$\ln(z)=\ln|z|=\ln|x+i0|=\ln|x|=\ln(x)\quad ;\quad x>0\ ,\ \arg(z)=0$$

أما على القسم السفلي للمقطع فنجد:

$$\begin{aligned}\ln(z)&=\ln|z|+i.\arg(z)=\ln|x-i0|+i.\arg(z)\\&=\ln|x|+i2\pi=\ln|\tilde{x}|=\ln(\tilde{x})\\&;\ x>0\quad ,\quad \arg(z)=2\pi\end{aligned}$$

ومن ثمَّ نجد أن:

$\ln(\tilde{x}) = \ln(x) + 2\pi i$ على الجزء السفلي للمقطع.

وبناءً على ما تقدم يكون:

$$f_1(z) = z^{\alpha-1}.[\ln(z)]^m.f(z) = h(z).[\ln(z)]^m.f(z)$$

ومن ثمَّ:

$$f_1(x) = x^{\alpha-1}.[\ln(x)]^m.f(x) = h(x).[\ln(x)]^m.f(x)$$

على القسم العلوي للمقطع.

أما على القسم السفلي للمقطع فيكون:

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).[\ln(\tilde{x})]^m.f(x) = e^{2\pi i.(\alpha-1)}.x^{\alpha-1}.[\ln(x) + 2\pi i]^m.f(x)$$
$$= e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.[\ln(x) + 2\pi i]^m.f(x)$$

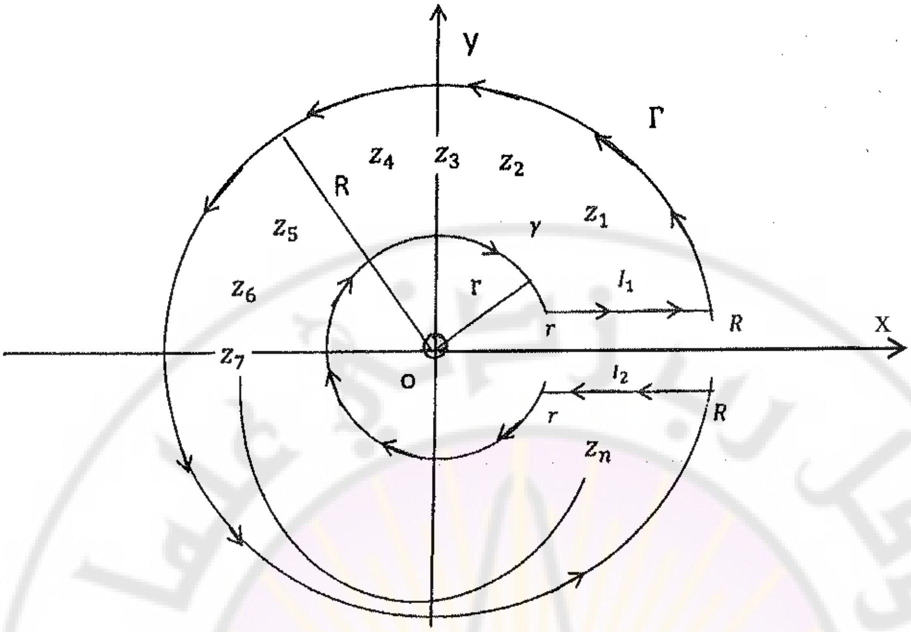
لنأخذ المحيط (المنحني-المسار) المؤلف من دائرتين متحدتين بالمركز γ, Γ مركز كل منهما الصفر ونصف قطر الدائرة γ هو r ونصف قطر الدائرة Γ هو R ونأخذ المجالين I_1 و I_2 بحيث:

$$I_1 = [r, R] \quad , \qquad I_2 = [R, r]$$

والممتدتان على الترتيب.

وبحيث r نجعلها أصغر ما يمكن و R نجعلها أكبر ما يمكن أي نأخذ $r \to 0$ و $R \to \infty$.

وبحيث إن جميع أقطاب الدالة $f(z)$ تقع داخل المنحني C كما في الشكل التالي: (شكل (٢٠)).



الشكل (٢٠)

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C z^{\alpha-1}.[\ln(z)]^m.f(z)\,dz = 2\pi i.\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\,..(*)$$

وحيث $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ جميع أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل D المحاطة بالمنحني C كما في الشكل السابق وبحيث الرواسب تؤخذ للتابع:

$f_1(z) = z^{\alpha-1}.[\ln(z)]^m.f(z)$ عند جميع الأقطاب المذكورة.

وبناءً على النتيجة من مبرهنة كوشي (التكامل على المنحني الخارجي يساوي إلى مجموع التكاملات على المنحنيات الداخلية) أي إن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_{l_1} f_1(z)\,dz + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{l_2} f_1(z)\,dz$$

$$= 2\pi i.\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z) \ \Rightarrow$$

$$\int_{r}^{R} f_1(x)\,dx + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{R}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx + \int_{\gamma} f_1(z)\,dz$$

$$= 2\pi i.\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z) \ \Rightarrow$$

وبجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r\to 0 \\ R\to\infty}} \left[\int_{r}^{R} f_1(x)\,dx + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{R}^{r} f_1(\tilde{x})\,dx + \int_{\gamma} f_1(z)\,dz \right] =$$

$$= 2\pi i.\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z) \ \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\infty} f_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\infty}^{0} f_1(\tilde{x})\,dx + \lim_{r\to 0} \int_{\gamma} f_1(z)\,dz$$

$$= 2\pi i.\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)$$

ولكن بحسب المبرهنة رقم (٢) من (١٠-٩.٢) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الثاني والرابع يسعيان إلى الصفر عندما تسعى كل من $R \to \infty$ و $r \to 0$ أي:

$$\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz \to 0 \quad , \quad \int_{\gamma} f_1(z)\,dz \to 0$$

$$R \to \infty \qquad\qquad r \to 0$$

ومن ثم فإن:

$$\int_{\infty}^{0} f_1(\tilde{x})\, dx + \int_{0}^{\infty} f_1(x)\, dx = 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \quad \Rightarrow$$

أي إن:

$$\int_{0}^{\infty} [f_1(x) - f_1(\tilde{x})]\, dx = 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \; ...(4)$$

لنناقش الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كانت α عدداً ليس صحيحاً، فعندئذٍ بالمتابعة من (4) نجد أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يحتوي على :

$$I.\,(1 - e^{2\pi\alpha i})$$

وكذلك الأمر من أجل $m > 1$ بالنسبة للتكاملات من الشكل:

$$II = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.[\ln(x)]^{S}.f(x)dx \quad ; \; 0 \le S \le m-1$$

وفي الحالة الخاصة عندما $m = 1$ فنلاحظ انطلاقاً من (4) :

$$\int_{0}^{\infty} [f_1(x) - f_1(\tilde{x})]\, dx = 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \quad \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\infty} [x^{\alpha-1}.[\ln(x)]^{m}.f(x) - e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.[\ln(x) + 2\pi i]^{m}.f(x)]\, dx$$

$$= 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z)$$

وبإعطاء $m = 1$ كما ذكرنا نجد:

$$\int_{0}^{\infty} [x^{\alpha-1}.[\ln(x)]\,.f(x) - e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.[\ln(x) + 2\pi i]\,.f(x)]\, dx$$

$$= 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}.[\ln(x)].f(x)\,dx - \int_0^\infty e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.[\ln(x)+2\pi i].f(x)\,dx =$$

$$= 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}.[\ln(x)].f(x)\,dx - \int_0^\infty e^{2\pi\alpha i}.x^{\alpha-1}.[\ln(x)].f(x)\,dx$$

$$- 2\pi i.e^{2\pi\alpha i}\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\,dx$$

$$= 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \Rightarrow$$

$$(1-e^{2\pi\alpha i}).I - 2\pi i.e^{2\pi\alpha i}\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\,dx =$$

$$= 2\pi i. \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f_1(z) \ldots(5)$$

وحيث $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ جميع أقطاب الدالة $f(z)$.

ومن المساواة (5) نتمكن من إيجاد قيمة التكامل I الذي يمثل الحالة الثامنة وذلك عندما $m = 1$ ونتمكن أيضاً إيجاد قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}.f(x)\,dx$$

والذي يمثل الحالة الخامسة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب.

وعملية الحصول على هذين التكاملين تتم من المساواة (5) وذلك بمطابقة القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

الحالة الثانية: إذا كانت α عدداً صحيحاً وليس كسرياً حقيقياً، فعندئذٍ التكامل (1) يؤول إلى تكامل من الشكل:

$$I = \int_{0}^{\infty} [\ln(x)]^m . f(x)dx \dots(6)$$

وفي هذه الحالة وبمثابة التابع المستكمل في (*) نأخذ:

$$f_1(z) = [\ln(z)]^{m+1} . f(z)$$

لأنه في الواقع لو أخذنا $f_1(z) = [\ln(z)]^m . f(z)$ فعندئذٍ يكون لدينا ما يلي:

$$f_1(x) = [\ln(x)]^m . f(x)$$

ويكون:

$$f_1(\tilde{x}) = [\ln(x) + 2\pi i]^m . f(x)$$

وعندئذٍ فإن العلاقة (4) لا تمكننا من حساب التكامل (6).

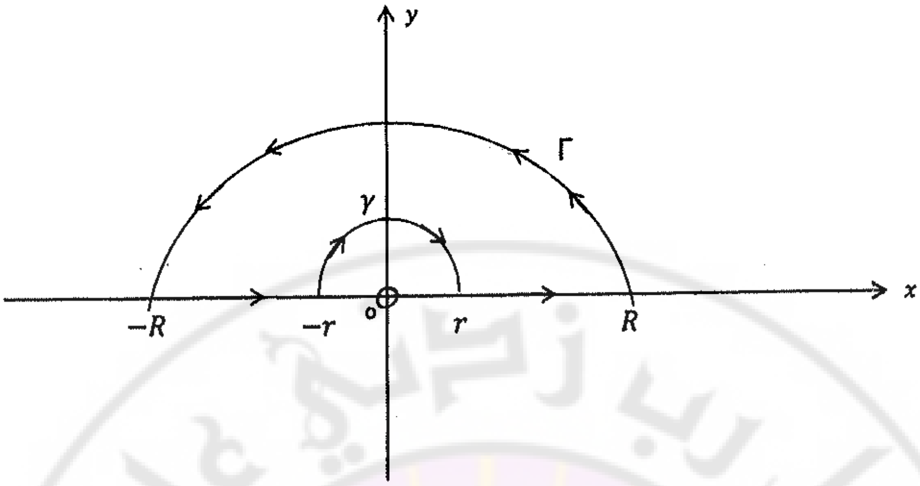
وفي خلاف ذلك إذا كان التابع $f(x)$ زوجياً فإنه بمنزلة التابع المستكمل الموجود في العلاقة (6) فإنه يمكن أخذ التابع:

$$f_1(z) = [\ln(z)]^m . f(z)$$

وعندها يكون طريق المكاملة هو المحيط C المؤلف من نصف الدائرتين المتحدتين بالمركز γ, Γ مركز كل منهما الصفر ونصف قطرنصف الدائرة γ هو r ونصف قطر نصف الدائرة Γ هو R أي:

$$\gamma = \{\, |z| = r\} \qquad , \qquad \Gamma = \{\, |z| = R$$

كما في الشكل التالي (الشكل (٢١)):



الشكل (٢١)

ولعل الأمثلة التالية توضح جميع الحالات السابقة:

مثال (١):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_{0}^{\infty} x^{\frac{-1}{2}}.\ln(x).\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

الحل:

إن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I = \int_{0}^{\infty} x^{\frac{-1}{2}}.\ln(x).\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.[\ln(x)]^{m}.f(x)dx$$

ونلاحظ أن $\alpha - 1 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ ونلاحظ أن $0 < \alpha = \frac{1}{2} < k = 2$ وحيث k تم تعيينها من العلاقة التقاربية التالية:

$$f(z) \cong \frac{c_{-2}}{z^2}$$
$$z \to \infty$$

والعلاقة التقاربية السابقة محققة كون النقطة $z = \infty$ هي عبارة عن صفر من المرتبة الثانية للتابع $f(z) = \frac{1}{(x+1)^2}$، هذا من جهة، ومن جهةٍ أخرى لدينا:

$\lim_{z\to 0}|z|^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{(z+1)^2} = 0$ وذلك كون $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ وكذلك الشرط:

$$\lim_{z\to\infty}|z|^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{(z+1)^2} = 0$$

محقق من كون $\alpha = \frac{1}{2} < k = 2$ وأن $m = 1$ ونلاحظ أن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z+1)^2 = 0 \Rightarrow z = -1$$

وهي عبارة عن قطب مضاعف وليست واقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي، أي غير واقعة على المجال $]0, +\infty[$ وبناءً على ماسبق وبناءً على تحقق جميع الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ يكون لدينا التكامل I متقارباً.

لنعزل في المستوي العقدي فرعاً تحليلياً للتابع $z^{\frac{-1}{2}}$ وليكن $h(z) = z^{\frac{-1}{2}}$ موجباً على الجزء العلوي للمقطع وعندها يكون:

$h(z) = h(x+i0) = h(x) = x^{\frac{-1}{2}}$ على الجزء العلوي للمقطع.

$$h(z) = h(x - i0) = h(\bar{x}) = e^{2\pi\left(\frac{-1}{2}\right)i}.x^{\frac{-1}{2}} = -x^{\frac{-1}{2}} =$$

$-h(x)$ على الجزء السفلي للمقطع.

ولنثبت فرعاً تحليلياً من فروع التابع اللوغارتمي ونرمز له بالرمز $\ln(z)$ وهذا الفرع يأخذ قيماً حقيقية على الجزء العلوي للمقطع ويكون لدينا في الساحة D التي تمثل المستوي العقدي باستثناء القطع على طول المحور الحقيقي الموجب ما يلي:

$$\ln(z) = \ln|z| + i.\arg(z) \quad ; \ 0 < \arg(z) < 2\pi$$

ويكون:

$\ln(z) = \ln|x + i0| + i.0 = \ln|x| = \ln(x) \ ; x > 0$ على الجزء العلوي للمقطع.

$$\ln(z) = \ln|x - i0| + i.2\pi = \ln|x| + i.2\pi = \ln(x) + i.2\pi = \ln(\tilde{x})\ ; x > 0$$

ومن ثمَّ:

$\ln(\tilde{x}) = \ln(x) + 2\pi i$ على الجزء السفلي للمقطع.

ومما سبق نجد أن:

$f_1(x) = h(x).\ln(x).f(x) = x^{\frac{-1}{2}}.\ln(x).\frac{1}{(x+1)^2}$ على الجزء العلوي للمقطع.

$$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).\ln(\tilde{x}).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.h(x).[\ln(x) + 2\pi i].f(x) =$$

$$e^{2\pi\left(\frac{-1}{2}\right)i}.x^{\frac{-1}{2}}.[\ln(x) + 2\pi i].\frac{1}{(x+1)^2} = -x^{\frac{-1}{2}}.[\ln(x) + 2\pi i].\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -x^{\frac{-1}{2}}.\ln(x).\frac{1}{(x+1)^2} - x^{\frac{-1}{2}}.\frac{2\pi i}{(x+1)^2} = -f_1(x) - 2\pi i.h(x).f(x)$$

لنأخذ المحيط المؤلف من دائرتين متحد تين بالمركز γ, Γ مركز كل منهما الصفر ونصف قطر الدائرة γ هو r ونصف قطر الدائرة Γ هو R ونأخذ المجالين I_1 و I_2 بحيث:

$$\gamma = \{\,|z| = r\} \qquad , \qquad \Gamma = \{\,|z| = R$$

$$I_1 = [r, R] \quad , \quad I_2 = [R, r]$$

والممتدتان على الترتيب.

وبحيث إن جميع أقطاب الدالة $f(z)$ تقع داخل المنحني C أي القطب $z = -1$ يقع داخل C كما في الشكل (٢٠).

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C z^{\frac{-1}{2}}.\ln(z).\frac{1}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i.\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z)$$

بحيث الرواسب تؤخذ للتابع $f_1(z) = z^{\frac{-1}{2}}\ln(z).\frac{1}{(z+1)^2}$ عند جميع الأقطاب للتابع $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ التي هي كما وجدنا $z = -1$.

وبناءً على النتيجة من مبرهنة كوشي نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_{I_1} f_1(z)\,dz + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{I_2} f_1(z)\,dzdz + \int_{\gamma} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_r^R f_1(x)\,dx + \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_R^r f_1(\tilde{x})\,dx + \int_{\gamma} f_1(z)\,dz = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z)$$

وبجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\int_0^{\infty} f_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\infty}^{0} f_1(\tilde{x})\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z)$$

ولكن بحسب المبرهنة رقم (٢) في (٢-٩-١٠) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الثاني والرابع معدومان عندما تسعى كل من $R \to \infty$ و $r \to 0$ أي:

$$\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \int_{\gamma} f_1(z)\,dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_0^{\infty} f_1(x)\,dx + \int_{\infty}^{0} f_1(\tilde{x})\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} [f_1(x) - f_1(\tilde{x})]\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) \;...(*)$$

ومن ثم فإن:

$$\int_0^{\infty} [f_1(x) - (-f_1(x) - 2\pi i.\,h(x).\,f(x))]\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1} f_1(z) \;\Rightarrow$$

$$2\int_0^\infty f_1(x)\,dx + 2\pi i\int_0^\infty h(x).\,f(x)\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z) \Rightarrow$$

$$2I + 2\pi i\int_0^\infty \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(x+1)^2}\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z) \quad \ldots(**)$$

بقي أن نحسب راسب التابع $f_1(z) = z^{\frac{-1}{2}}.\ln(z).\frac{1}{(z+1)^2}$ عند $z = -1$

وهي عبارة عن قطب مضاعف ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2.\,f_1(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[z^{\frac{-1}{2}}.\ln(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to-1}\left[\frac{-1}{2}.z^{\frac{-3}{2}}.\ln(z) + \frac{z^{\frac{-1}{2}}}{z}\right] = \lim_{z\to-1}\left[\frac{-1}{2}.z^{\frac{-3}{2}}.\ln(z) + z^{\frac{-3}{2}}\right]$$

$$= \lim_{z\to-1} z^{\frac{-3}{2}}.\left[1 - \frac{\ln(z)}{2}\right] = (-1)^{\frac{-3}{2}}.\left[1 - \frac{\ln(-1)}{2}\right]$$

$$= e^{\frac{-3\pi}{2}i}.\left[1 - \frac{\ln|-1| + i\pi}{2}\right] = i.\left[1 - \frac{i\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + i$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z=-1}f_1(z) = \frac{\pi}{2} + i$$

بالعودة إلى (**) نجد أن:

$$2I + 2\pi i\int_0^\infty \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(x+1)^2}\,dx = 2\pi i.\left(\frac{\pi}{2} + i\right) \Rightarrow$$

$$2I + 2\pi i\int_0^\infty \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(x+1)^2}\,dx = \pi^2 i - 2\pi$$

وبمطابقة القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي نحصل على:

$$2I = -2\pi \Rightarrow I = -\pi$$

$$2\pi i \int_0^\infty \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(x+1)^2}\,dx = \pi^2 i \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$I = \int_0^\infty x^{\frac{-1}{2}} . \ln(x) . \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\pi$$

مثال (٢):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2} \quad ; \quad a > 0$$

الحل:

ليكن C هو المحيط المبين في الشكل (٢١).

وبحيث γ, Γ نصف دائرتين متحدتين بالمركز نصف قطر نصف الدائرة γ هو r ونصف قطر نصف الدائرة Γ هو R والمجالين I_1 و I_2 بحيث:

$$I_1 = [-R, -r] \quad , \quad I_2 = [r, R]$$

وبحيث نجعل R أكبر مايمكن وبحيث r نجعلها أصغر مايمكن.

وأخذنا طريق المكاملة السابق لأننا رأينا في الدراسة النظرية أنه إذا كان α عدداً صحيحاً أي الحالة الثانية من المناقشة النظرية وكان $f(x)$ تابعاً زوجياً فعندئذٍ نكامل التابع: $f_1(z) = \frac{\ln(z)}{z^2+a^2}$ على المنحني C المرسوم بالشكل (٢١) وحيث:

$$f_1(z) = \frac{\ln(z)}{z^2 + a^2}$$

هو الفرع التحليلي للتابع اللوغارتمي الذي يأخذ قيماً حقيقية من أجل $z = x$ وحيث $x > 0$. وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C \frac{\ln(z)}{z^2 + a^2}\,dz = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=ai} f_1(z)$$

بحيث الرواسب تؤخذ للتابع $f_1(z) = \frac{\ln(z)}{z^2+a^2}$ عند جميع الأقطاب للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي هي $z = ai$.

وبناءً على النتيجة من مبرهنة كوشي نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_1} f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_2} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=ai} f_1(z) \Rightarrow$$
$$\int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} f_1(x)\,dx + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_r^R f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=ai} f_1(z) \Rightarrow$$

وبجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_0^\infty f_1(\tilde{x})\,dx$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=ai} f_1(z)$$

ولكن بحسب توطئة (مبرهنة سابقة) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الأول والثالث معدومان عندما تسعى كل من $R \to \infty$ و $r \to 0$ أي:

$$\int_\Gamma f_1(z)\,dz \to 0 \quad , \quad \int_\gamma f_1(z)\,dz \to 0$$
$$R \to \infty \qquad\qquad\qquad r \to 0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f_1(\tilde{x})\,dx = 2\pi i.\operatorname{Res}_{z=ai} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)+\pi i}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i.\operatorname{Res}_{z=ai} f_1(z) \ldots(*)$$

بقي أن نحسب راسب التابع $f_1(z) = \frac{\ln(z)}{z^2+a^2}$ عند $z = ai$ وهي عبارة عن قطب بسيط ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\operatorname{Res}_{z=ai} f_1(z) = \lim_{z\to ai}(z-ai).f_1(z)$$

$$= \lim_{z\to ai}\left[(z-ai).\frac{\ln(z)}{(z-ai).(z+ai)}\right] = \left[\frac{\ln(z)}{(z+ai)}\right]_{z=ai}$$

$$= \frac{\ln(ai)}{2ai} = \frac{\ln(a)+i.\frac{\pi}{2}}{2ai} == -\frac{i.\ln(a)}{2a} + \frac{\pi}{4a} \quad ; \quad a>0$$ من الفرض

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=ai} f_1(z) = -\frac{i.\ln(a)}{2a} + \frac{\pi}{4a}$$

بالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)+\pi i}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i.\left(-\frac{i.\ln(a)}{2a} + \frac{\pi}{4a}\right) \Rightarrow$$

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx + \pi i\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi.\ln(a)}{a} + \frac{\pi^2}{2a} i$$

وبمطابقة القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي نحصل على:

$$2I = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi.\ln(a)}{a} \Rightarrow I = \frac{\pi.\ln(a)}{2a}$$

$$\pi i\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi^2}{2a} i \Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi . \ln(a)}{2a}$$

الحالة التاسعة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

وهي عبارة عن حساب التكاملات من الشكل:

$$\mathbf{I = \int_{a}^{b} \left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^{m} . f(x)dx \ldots (1)}$$

وبحيث $b > a$ و $a, b \in R$ و $m \geq 0$

إذا وضعنا $b = \infty$ و $a = 0$ و $m = 0$ فإن التكامل (1) يؤول إلى تكامل من الشكل:

$$I = \int_{0}^{\infty} f(x)dx \ldots (1`)$$

حيث $f(x)$ تابع كسري عادي يحقق الشروط الواردة في الحالة الخامسة .

إذا كان التابع $f(x)$ زوجياً فعندئذٍ يكون:

$$I = \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ولحساب هذا التكامل نستخدم الطريقة المتبعة والمعروفة في الحالة الثانية المأخوذة سابقاً. أما إذا كان $f(x)$ تابعاً غير زوجي (بِغَضّ النَظرِ فردياً كانَ أمْ غير فرديّ) فعندئذٍ ينبغي استعراض التكامل التالي:

$$I = \int_{C} \ln(z) . f(z)dz$$

حيث C هو المحيط أو الكانتور (المسار) المرسوم في الشكل الموافق للحالة الخامسة والمؤلف من دائرتين Γ, γ متحدتين بالمركز مركز كل منهما هو الصفر ونصف قطر الدائرة γ هو r ونصف قطر الدائرة Γ, هي عبارة عنR ومكون أيضاً من المجالين I_1و I_2 الممتدين على المحور الحقيقي بحيث $I_1 = [r, R]$ و $I_2 = [R, r]$ وبحيث $r \to 0$ و $R \to \infty$ وجميع أقطاب الدالة $f(z)$تقع داخل المنحني C أي كما في الشكل (٢٠).

أما بالنسبة لـ $\ln(z)$ فهو عبارة عن الفرع التحليلي للتابع اللوغارتمي.

ملاحظة (١): إذا أجرينا التحويل $y = \frac{x-a}{b-x}$ فإن التكامل (1) يؤول إلى التكامل من شكل الحالة الثامنة وفق مايلي:

$$y = \frac{x-a}{b-x} \Rightarrow b.y - x.y = x - a \Rightarrow b.y + a = x(y+1) \Rightarrow$$

$$x = \frac{b.y + a}{y+1} \Rightarrow dx = \frac{b(y+1) - (b.y+a)}{(y+1)^2} dy = \frac{b-a}{(y+1)^2} dy$$

ونعلم أنه بإجراء تغيير بالمتحول للتكامل المحدد سوف يرافقه إجراء تغيير في حدود التكامل فتكون حدود التكامل الجديدة هي:

الحد الأدنى للتكامل $x_1 = a \Rightarrow y_1 = \left[\frac{x-a}{b-x}\right]_{x=a} = 0$

الحد الأعلى للتكامل $x_2 = b \Rightarrow y_2 = \left[\frac{x-a}{b-x}\right]_{x=b} = \infty$

بالتعويض في التكامل (1) نجد أن:

$$I = \int_a^b \left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^m . f(x)dx = \int_0^\infty [\ln(y)]^m . f\left(\frac{b.y+a}{y+1}\right) . \frac{b-a}{(y+1)^2} dy$$

$$= \int_0^\infty [\ln(y)]^m . F(y)dy \quad ; \quad F(y) = f\left(\frac{b.y+a}{y+1}\right) . \frac{b-a}{(y+1)^2}$$

والأخيرة هي تكامل من شكل الحالة الثامنة وهو المطلوب.

ملاحظة (٢):لمعالجة التكامل (1) وإجراء الدراسة التفصيلية له ينبغي لنا أن نسلك الطريقة المتبعة في الحالة الثامنة.

أمثلة محلولة:

مثال (١):

احسب قيمة التكامل التالي وذلك باستخدام مبرهنة الرواسب وبحيث:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^3+1)^2}$$

الحل:

إن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\int_{a}^{b}x^{\alpha-1}.\left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^m.f(x)dx$$

ونلاحظ أن $m=0$ و $a=0$ و $b=\infty$ و $\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=1$

والأكثر من ذلك $f(x)=\frac{1}{(x^3+1)^2}$ هو تابع كسري عادي نظامي وليكن $f(z)=\frac{1}{(z^3+1)^2}$ الناتج عن تبديل كل x بالمتحول العقدي z في التابع $f(x)$.

إن النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z^3+1)^2=0\Rightarrow z^3+1=0\Rightarrow z^3=-1$$

وإن هذه الجذور تعطى بالشكل:

$$z_k=r^{\frac{1}{3}}.\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{3}+i.\sin\frac{\theta+2\pi k}{3}\right]\quad;\quad k=1,2,3$$

ونلاحظ أن:

$$r=1\quad,\quad\theta=\pi$$

ومن ثمَّ:

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i.\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3} = e^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i} = e^{(1+2k).\frac{\pi}{3}i} \; ; k = 1,2,3$$

وهي عبارة عن أقطاب من المرتبة الثانية وغير واقعة على المحور الحقيقي الموجب.

ونلاحظ أن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^{\alpha}}{(z^3+1)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{|z|}{(z^3+1)^2} = 0$$

$$\lim_{z\to \infty}\frac{|z|^{\alpha}}{(z^3+1)^2} = \lim_{z\to \infty}\frac{|z|}{(z^3+1)^2} = 0$$

وكون أن جميع الشروط المفروضة على التابع $f(x)$ في الحالة الخامسة محققة فإن التكامل المفروض متقارب، ويمكن تعيين قيمته باستخدام مبرهنة الرواسب، وذلك عن طريق الحالة التاسعة من تطبيقات مبرهنة الرواسب.

لدينا $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$ فنلاحظ أن هذا التابع ليس زوجياً ومن ثمَّ وبحسب الدراسة النظرية التي تم أخذها في الحالة التاسعة لتعيين قيمة التكامل المفروض لا بد من استعراض التكامل التالي:

$$\int_C f_1(z)dz = \int_C \frac{\ln(z)}{(z^3+1)^2}dz \quad ; \; f_1(z) = \ln(z).f(z)$$

وحيث C هو المحيط المرسوم في الشكل (٢٠) والمؤلف من دائرتين Γ, γ متحدتين بالمركز مركز كل منهما هو الصفر ومكون أيضاً من المجالين I_1 و I_2 الممتدين على المحور الحقيقي بحيث $I_1 = [r, R]$ و $I_2 = [R, r]$ وبحيث $r \to 0$ و $R \to \infty$ وجميع أقطاب الدالة $f(z)$تقع داخل المنحني C أي جميع الأقطاب:

$$z_k = e^{(1+2k).\frac{\pi}{3}i} \; ; k = 1,2,3$$ تقع داخل المنحني C

لنثبت فرعاً تحليلياً من فروع التابع اللوغارتمي نرمز له بالرمز $\ln(z)$ ومن ميزات هذا الفرع أنه يأخذ قيماً حقيقية على الجزء العلوي للمقطع والأكثر من ذلك يكون:

$\ln(z) = \ln(x + i0) = \ln(x)$ على الجزء العلوي للمقطع.

$\ln(z) = \ln(x - i0) = \ln(\tilde{x}) = \ln(x) + 2\pi i$ على الجزء السفلي للمقطع

ومن ثمَّ:

$f_1(x) = \ln(x) . f(x) = \frac{\ln(x)}{(x^3+1)^2}$ على الجزء العلوي للمقطع.

$f_1(\tilde{x}) = \ln(\tilde{x}) . f(x) = \frac{\ln(x)+2\pi i}{(x^3+1)^2} = f_1(x) + \frac{2\pi i}{(x^3+1)^2}$ على الجزء السفلي للمقطع.

ومن ثمَّ بتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)dz = \int_C \frac{\ln(z)}{(z^3+1)^2} dz = 2\pi i. \left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

ويكون:

$$\int_\gamma f_1(z)dz + \int_{I_1} f_1(z)dz + \int_\Gamma f_1(z)dz + \int_{I_2} f_1(z)dz$$

$$= 2\pi i. \left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right] \Rightarrow$$

$$\int_\gamma f_1(z)dz + \int_r^R f_1(x)dx + \int_\Gamma f_1(z)dz + \int_R^r f_1(\tilde{x})dx$$

$$= 2\pi i. \left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

وبجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{r\to 0} \int_\gamma f_1(z)dz + \int_0^\infty f_1(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f_1(z)dz + \int_\infty^0 f_1(\tilde{x})dx$$

$$= 2\pi i.\left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

ولكن الحد الأول والثالث معدومان بحسب المبرهنة رقم (٢) (١٠.٩.٢) وذلك لأن:

$$M(r) = \max_{z\in\gamma}|f_1(z)| \quad , \qquad M(R) = \max_{z\in\Gamma}|f_1(z)|$$

و $f_1(z)$ له قيمة عظمى كونه محدوداً ونلاحظ أن:

$$\underset{r\to 0}{r.M(r) \to 0} \quad , \quad \underset{R\to\infty}{R.M(R) \to 0}$$

ومن ثمَّ يكون بحسب المبرهنة السابقة الذكر ما يلي:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)dz = \int_{\Gamma} f_1(z)dz = 0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_0^{\infty} f_1(x)dx + \int_{\infty}^{0} f_1(\tilde{x})dx = 2\pi i.\left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

ولكن وجدنا أن:

$$f_1(\tilde{x}) = \frac{\ln(x) + 2\pi i}{(x^3+1)^2} = f_1(x) + \frac{2\pi i}{(x^3+1)^2}$$

ومن ثمَّ:

$$\int_0^{\infty} f_1(x)dx + \int_{\infty}^{0}\left(f_1(x) + \frac{2\pi i}{(x^3+1)^2}\right)dx = 2\pi i.\left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

$$\int_0^{\infty} f_1(x)dx - \int_{0}^{\infty}\left(f_1(x) + \frac{2\pi i}{(x^3+1)^2}\right)dx = 2\pi i.\left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

$$-2\pi i\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^3+1)^2} = -2\pi i.I = 2\pi i.\left[\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right] \Rightarrow$$

$$I = -\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}_{z=z_k} f_1(z) \quad \dots (*)$$

ومن ثمَّ لنوجد رواسب التابع $f_1(z) = \frac{\ln(z)}{(z^3+1)^2}$ عند الأقطاب:

$$z_k = e^{(1+2k).\frac{\pi}{3}i} \;\; ; k = 1,2,3$$

التي هي كما وجدنا أقطاب من المرتبة الثانية للتابع $f(z) = \frac{1}{(z^3+1)^2}$ ومن ثمَّ بحسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أنه بالنسبة للنقطة $z_1 = e^{\pi i} = -1$ ما يلي:

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f_1(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 . f_1(z)\right] =$$

$$\lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 . \frac{\ln(z)}{(z^3+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 . \frac{\ln(z)}{(z-z_1)^2 .(z-z_2)^2 .(z-z_3)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{\ln(z)}{(z-z_2)^2 .(z-z_3)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left[\ln(z) .(z-z_2)^{-2} .(z-z_3)^{-2}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_1}\left[\frac{1}{z}.(z-z_2)^{-2}.(z-z_3)^{-2} - 2\ln(z).(z-z_2)^{-3}.(z-z_3)^{-2} - 2\ln(z).(z-z_2)^{-2}.(z-z_3)^{-3}\right]$$

$$= \frac{1}{z_1 .(z_1-z_2)^2 .(z_1-z_3)^2} - 2\ln(z_1) . \frac{2z_1 - z_2 - z_3}{(z_1-z_2)^3 .(z_1-z_3)^3}$$

ولكن قبل المتابعة يمكن أن نستفيد مما يلي:

مجموع الجذور مساوٍ الصفر $\quad (**) \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0$

مكعب الجذر z_1 مساوٍ $1-$ $\quad (***) \quad z_1^3 = -1$

$$(z^3+1)=(z-z_1).(z-z_2).(z-z_3) \Rightarrow$$ بالإشتقاق

$$\Rightarrow 3z^2=(z-z_2).(z-z_3)+(z-z_1).(z-z_3)+(z-z_1).(z-z_2)$$

ومن ثمَّ:

$$3(z_1)^2=(z_1-z_2).(z_1-z_3) \quad \dots(****)$$

بالاستفادة من (**) و(***)و(****) في عبارة الراسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=z_1}f_1(z)=\frac{1}{z_1.(3(z_1)^2)^2}-2\ln(z_1).\frac{3z_1}{(3(z_1)^2)^3}=\frac{1-2\ln(z_1)}{9(z_1)^5}$$

ولكن $\ln(z_1)=\ln(e^{\pi i})=\pi i$ وبالتالي:

$$\mathrm{Res}_{z=z_1}f_1(z)=\frac{z_1}{9}.(1-2\pi i)$$

أما بالنسبة للنقطة $z_2=e^{\frac{5}{3}\pi i}$ فيكون:

$$\mathrm{Res}_{z=z_2}f_1(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}[(z-z_2)^2.f_1(z)]=$$

$$\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2.\frac{\ln(z)}{(z^3+1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2.\frac{\ln(z)}{(z-z_1)^2.(z-z_2)^2.(z-z_3)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left[\frac{\ln(z)}{(z-z_1)^2.(z-z_3)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}[\ln(z).(z-z_1)^{-2}.(z-z_3)^{-2}]$$

$$=\lim_{z\to z_2}\left[\frac{1}{z}.(z-z_1)^{-2}.(z-z_3)^{-2}-2\ln(z).(z-z_1)^{-3}.(z-z_3)^{-2}\right.$$
$$\left.-2\ln(z).(z-z_1)^{-2}.(z-z_3)^{-3}\right]$$

$$=\frac{1}{z_2.(z_2-z_1)^2.(z_2-z_3)^2}-2\ln(z_2).\frac{2z_2-z_1-z_3}{(z_2-z_1)^3.(z_2-z_3)^3}$$

يمكن أن نستفيد مما يلي:

مجموع الجذور مساوٍ الصفر $\qquad (**) \qquad z_1 + z_2 + z_3 = 0$

مكعب الجذر z_2 مساوٍ $1-$ $\qquad (***) \qquad (z_2)^3 = -1$

$$3(z_2)^2 = (z_2 - z_1).(z_2 - z_3) \quad ... (****)$$

بالاستفادة من $(**)$ و$(***)$و$(****)$ في عبارة الراسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=z_2} f_1(z) = \frac{1}{z_2.(3(z_2)^2)^2} - 2\ln(z_2).\frac{3z_2}{(3(z_2)^2)^3} = \frac{1 - 2\ln(z_2)}{9(z_2)^5}$$

ولكن $\ln(z_2) = \ln\left(e^{\frac{5\pi i}{3}}\right) = \frac{5\pi i}{3}$ ومن ثمّ:

$$\mathrm{Res}_{z=z_2} f_1(z) = \frac{1 - \frac{10\pi}{3} i}{9(z_2)^5} = \frac{z_2}{9}.\left(1 - \frac{10\pi}{3} i\right)$$

أما بالنسبة للنقطة $z_3 = e^{\frac{7}{3}\pi i} = e^{\frac{\pi}{3} i}$ فنجد:

$$\mathrm{Res}_{z=z_3} f_1(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz}[(z - z_3)^2.f_1(z)] =$$

$$\lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz}\left[(z - z_3)^2.\frac{\ln(z)}{(z^3+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz}\left[(z - z_3)^2.\frac{\ln(z)}{(z - z_1)^2.(z - z_2)^2.(z - z_3)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz}\left[\frac{\ln(z)}{(z - z_1)^2.(z - z_2)^2}\right] = \lim_{z \to z_3} \frac{d}{dz}[\ln(z).(z - z_1)^{-2}.(z - z_2)^{-2}]$$

$$= \lim_{z \to z_3}\left[\frac{1}{z}.(z - z_1)^{-2}.(z - z_2)^{-2} - 2\ln(z).(z - z_1)^{-3}.(z - z_2)^{-2} - 2\ln(z).(z - z_1)^{-2}.(z - z_2)^{-3}\right]$$

$$= \frac{1}{z_3.(z_3 - z_1)^2.(z_3 - z_2)^2} - 2\ln(z_3).\frac{2z_3 - z_1 - z_2}{(z_3 - z_1)^3.(z_3 - z_2)^3}$$

يمكن أن نستفيد مما يلي:

مجموع الجذور مساوٍ الصفر $\qquad (**) \qquad z_1 + z_2 + z_3 = 0$

مكعب الجذر z_3 مساوٍ -1 $\quad (***) \quad (z_3)^3 = -1$

$$3(z_3)^2 = (z_3 - z_1).(z_3 - z_2) \quad \dots (****)$$

بتعويض كل من (**) و(***) و(****) في عبارة الراسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=z_3} f_1(z) = \frac{1}{z_3.(3(z_3)^2)^2} - 2\ln(z_3).\frac{3z_3}{(3(z_3)^2)^3} = \frac{1-2\ln(z_3)}{9(z_3)^5}$$

ولكن $\ln(z_3) = \ln\left(e^{\frac{7\pi i}{3}}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right) = \frac{\pi i}{3}$ ومن ثمَّ:

$$\mathrm{Res}_{z=z_3} f_1(z) = \frac{1-\frac{2\pi}{3}i}{9(z_3)^5} = \frac{z_3}{9}.\left(1-\frac{2\pi}{3}i\right)$$

بتعويض الرواسب التي حصلنا عليها بالعبارة (*) نجد أن:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^2}dx$$

$$= -\left[\frac{z_1}{9}.(1-2\pi i) + \frac{z_2}{9}.\left(1-\frac{10\pi}{3}i\right) + \frac{z_3}{9}.\left(1-\frac{2\pi}{3}i\right)\right]$$

$$= -[\frac{z_1}{9}.(1-2\pi i) + \frac{z_2}{9}.\left(1-2\pi i+2\pi i-\frac{10\pi}{3}i\right)$$

$$+\frac{z_3}{9}.\left(1-2\pi i+2\pi i-\frac{2\pi}{3}i\right)$$

إن الغاية من عملية إضافة $2\pi i$ وطرح $2\pi i$ هو الاستفادة من $z_1 + z_2 +$ $z_3 = 0$ ومن ثمَّ نجد:

$$I = -\left[\frac{z_1}{9}.(1-2\pi i) + \frac{z_2}{9}.(1-2\pi i) - \frac{z_2}{9}.\left(\frac{4\pi}{3}i\right) + \frac{z_3}{9}.(1-2\pi i)\right.$$
$$\left.+\frac{z_3}{9}.\left(\frac{4\pi}{3}i\right)\right] = \frac{z_2 - z_3}{9}.\frac{4\pi}{3}i$$

وذلك كون:

$$\frac{z_1}{9}.(1-2\pi i)+\frac{z_2}{9}.(1-2\pi i)+\frac{z_3}{9}.(1-2\pi i)$$

$$=(z_1+z_2+z_3).\frac{(1-2\pi i)}{9}=0$$

إذاً نستنتج أن:

$$I=\frac{z_2-z_3}{9}.\frac{4}{3}\pi i=\frac{e^{\frac{5\pi}{3}i}-e^{\frac{\pi}{3}i}}{27}.4\pi i$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{27}.4\pi i=\frac{-\sqrt{3}.i}{27}.4\pi i=\frac{4\pi\sqrt{3}}{27} \Rightarrow$$

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$$

مثال (٢):

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}$$

الحل:

طريقة (١): إن التكامل السابق هو تكامل من الشكل:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}=\int_0^\infty \ln(x).f(x)dx$$

ونلاحظ أن التابع $f(x)$ هو عبارة عن تابع زوجي.

ليكن C هو المحيط المبين في الشكل (٢١). وبحيث γ, Γ نصف دائرتين متحدتين بالمركز نصف قطر نصف الدائرة γ هو r ونصف قطر نصف الدائرة Γ هو R والمجالان I_1 و I_2 بحيث:

$$I_1 = [-R, -r] \quad , \quad I_2 = [r, R]$$

وبحيث نجعل R أكبر ما يمكن وبحيث r نجعلها أصغر ما يمكن.

وأخذنا طريق المكاملة السابق لأننا رأينا في الدراسة النظرية(في الحالة الثامنة) أنه إذا كان α عدداً صحيحاً أي الحالة الثانية من حالات α وكان $f(x)$ تابعاً زوجياً فعندئذٍ نكامل التابع:

$$f_1(z) = \frac{\ln(z)}{(z^2+1)^2}$$

على المنحني C المرسوم بالشكل السابق (٢١).

وحيث:

$$f_1(z) = \frac{\ln(z)}{(z^2+1)^2}$$

هو الفرع التحليلي للتابع اللوغارتمي الذي يأخذ قيماً حقيقية من أجل $z = x$ وحيث $x > 0$.

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_C \frac{\ln(z)}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i.\operatorname{Res}_{z=i} f_1(z)$$

بحيث الرواسب تؤخذ للتابع $f_1(z) = \frac{\ln(z)}{(z^2+1)^2}$ عند جميع الأقطاب للتابع $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ والواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي التي هي $z = i$.

ومن ثمَّ نجد أن:

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_\Gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_1} f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_{I_2} f_1(z)\,dz$$
$$= 2\pi i.\operatorname{Res}_{z=i} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} f_1(x)\,dx + \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{r}^{R} f_1(x)\,dx$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) \Rightarrow$$

وبجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{0}^{\infty} f_1(x)\,dx$$
$$= 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z)$$

ولكن بحسب توطئة (مبرهنة سابقة) وشروطها المحققة نجد أن التكاملين الأول والثالث معدومان عندما تسعى كل من $\infty \leftarrow R$ و $0 \leftarrow r$ أي:

$$\int_{\Gamma} f_1(z)\,dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \int_{\gamma} f_1(z)\,dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f_1(x)\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x) + i\pi}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i.\,\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) \ldots (*)$$

بقي أن نحسب راسب التابع $f_1(z) = \frac{\ln(z)}{(z^2+1)^2}$ عند $z = i$، وهي عبارة عن قطب مرتبة ثانية ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=i} f_1(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 . f_1(z)\right]$$
$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 . \frac{\ln(z)}{(z-i)^2 . (z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\ln(z)}{(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{1}{z}(z+i)^2 - 2(z+i).\ln(z)}{(z+i)^4}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{1}{z}(z+i)\ - 2.\ln(z)}{(z+i)^3}\right]$$

$$= \frac{2-2\ln(i)}{-8i} = \frac{\ln(i)-1}{4i} = \frac{i.\frac{\pi}{2}-1}{4i} = \frac{i}{4}+\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z=ai} f_1(z) = \frac{i}{4}+\frac{\pi}{8}$$

بالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)+i\pi}{(x^2+1)^2}dx + \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi i.\left(\frac{i}{4}+\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow$$

$$2\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx + \pi i\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}i$$

وبمطابقة القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي نحصل على:

$$2I = 2\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{-\pi}{4}$$

$$\pi i\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi^2}{4}i \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

ومن ثمَّ نستنتج أن:

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-\pi}{4}$$

الحالة العاشرة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

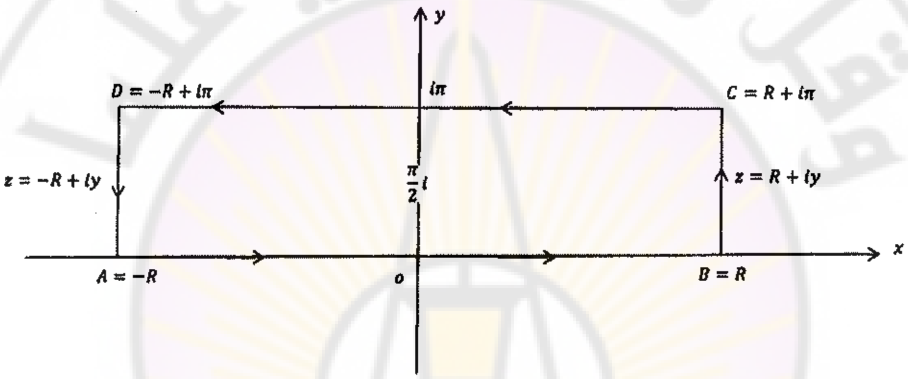
وهي عبارة عن حساب التكاملات من الشكل التالي:

$$\mathbf{I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)} dx \quad ; \quad |a| < 1}$$

لنأخذ المنحني C المؤلف من المستطيل ABCD الذي رؤوسه هي النقاط :

$$A = -R\,, B = R\,, C = R + \pi i\,, D = -R + \pi i$$

كما في الشكل التالي:



الشكل (٢٢)

لنأخذ التابع $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\cosh(z)}$ وهدفنا الآن إيجاد أقطاب الدالة $\dfrac{e^{az}}{\cosh(z)}$ التي كما نلاحظ هي عبارة عن أقطاب بسيطة، وتكون عبارة عن حلول المعادلة:

$$\cosh(z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}.(e^{z} + e^{-z}) = 0 \Rightarrow e^{z} + e^{-z} = 0 \Rightarrow e^{z} = -e^{-z}$$
$$\Rightarrow e^{2z} = -1 \Rightarrow 2z = \ln(-1)$$
$$= \ln|-1| + i(\pi + 2\pi.n)$$
$$\Rightarrow 2z_n = i(\pi + 2\pi.n) \Rightarrow z_n = i\pi\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

من أجل $n = 0$ فنحصل على القطب البسيط $z_0 = \frac{i\pi}{2}$ وهو عبارة عن القطب البسيط الوحيد الذي يقع داخل الطريق C ولنحسب الراسب للتابع $f(z)$ عند $z = \frac{i\pi}{2}$، وذلك حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}} f(z) = \lim_{z \to \frac{i\pi}{2}} \left(z - i\frac{\pi}{2}\right).f(z) = \lim_{z \to \frac{i\pi}{2}} \left(z - i\frac{\pi}{2}\right).\frac{e^{az}}{\cosh(z)} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال فنجد:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}} f(z) = \lim_{z \to \frac{i\pi}{2}} \frac{e^{az} + a.\left(z - i\frac{\pi}{2}\right).e^{az}}{\sinh(z)} = \frac{e^{a\left(\frac{i\pi}{2}\right)}}{\sinh\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{i.\pi a}{2}}}{i.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{i.\pi a}{2}}}{i} = -i.e^{\frac{i.\pi a}{2}}$$

مع الملاحظة أننا استفدنا من العلاقة:

$$\sinh\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ (التحليلي العقدي (١))

ومن ثمّ توصلنا إلى:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}} f(z) = -i.e^{\frac{i.\pi a}{2}}$$

واستناداً إلى مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{e^{az}}{\cosh(z)}dz = 2\pi i.\operatorname{Res}_{z=\frac{i\pi}{2}} f(z) \Rightarrow$$

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.\left(-i.e^{\frac{i.\pi a}{2}}\right) = 2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}} \Rightarrow \int_C \frac{e^{az}}{\cosh(z)}dz = 2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}}$$

هذه من جهة ومن جهة أخرى:

$$\int_C f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz + \int_{DA} f(z)dz$$

$$= 2\pi . e^{\frac{i.\pi a}{2}} \quad ...(*)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة AB يكون لدينا ما يلي:

$$\{-R \le x \le R \quad , \quad y = 0 \Rightarrow dy = 0\} \quad \Rightarrow dz = dx$$

$$\Rightarrow \int_{AB} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx \quad .... (1)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة BC يكون:

$$\{0 \le y \le \pi \quad , \quad x = R \Rightarrow dx = 0\} \quad \Rightarrow dz = idy$$

$$\Rightarrow \int_{BC} f(z)dz = \int_{0}^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} . idy \quad .... (2)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة CD يكون لدينا ما يلي:

$$\int_{CD} f(z)dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)} dx \quad .... (3)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة DA يكون:

$$\int_{DA} f(z)dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)} . idy \quad .... (4)$$

بتعويض كل من (1) و (2) و (3) و (4) في (*) نجد أن:

$$\int_{C} \frac{e^{az}}{\cosh(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} . idy$$

$$+ \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)} dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)} . idy = 2\pi . e^{\frac{i.\pi a}{2}}$$

وبجعل $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.idy+\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)}dx\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)}.idy\right]=2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}}$$

ومن ثمَّ:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.idy$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)}.idy$$

$$=2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}}\quad ...(**)$$

ولكن إن كلاً من التكاملين الثاني والرابع يسعيان إلى الصفر عندما $R\to\infty$ أي إن:

$$\int_{0}^{\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.idy\ \to 0\quad,\quad \int_{\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)}.idy\ \to 0$$

$$R\to\infty\qquad\qquad R\to\infty$$

وبرهان ذلك سوف يتم عن طريق تقدير التكامل، فمثلاً إذا تم أخذ أحد التكاملين السابقين وليكن:

$$\int_{0}^{\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.idy$$

ولنقم بتقدير هذا التكامل ولكن لدينا:

$$|\cosh(R+iy)|=\left|\frac{1}{2}.(e^{R+iy}+e^{-R-iy})\right|\geq\frac{1}{2}\left(\left|e^{R+iy}\right|-\left|e^{-R-iy}\right|\right)$$

والخطوة السابقة هي عبارة عن خواص الطويلة التي تم عرض فكرتها في تحليل عقدي (1) وهي:

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \quad \forall\, z_1\,, z_2$$

وبالعودة نجد أن:

$$|\cosh(R+iy)| \geq \frac{1}{2}\left(\left|e^{R+iy}\right| - \left|e^{-R-iy}\right|\right) = \frac{1}{2}.\left(e^{R} - e^{-R}\right) \geq \frac{e^{R}}{4}$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\frac{1}{|\cosh(R+iy)|} \leq \frac{4}{e^{R}} \quad ...(\text{أ})$$

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.\, idy\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.\, i\right| dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{a(R+iy)}\right|}{|\cosh(R+iy)|}.\, |i| dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{aR}}{|\cosh(R+iy)|} dy \leq (\text{أ}) \text{ بحسب } \leq \int_0^{\pi} \frac{4e^{aR}}{e^{R}} dy = \frac{4\pi.\, e^{aR}}{e^{R}}$$

ومن ثمَّ ومن هذا كله يكون لدينا :

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.\, idy\right| \leq \frac{4\pi.\, e^{aR}}{e^{R}}$$

وعندما $R \to \infty$ يكون:

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.\, idy\right| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{4\pi.\, e^{aR}}{e^{R}} = \lim_{R\to\infty} 4\pi.\, e^{R(a-1)} = 0$$

وذلك كون $|a| < 1$ بالفرض وبالتالي:

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.\, idy\right| = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}.\, idy \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)}.\,idy \to 0$$

$$R \to \infty$$

وبالعودة إلى (**) نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx + \lim_{R\to\infty} \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)}dx = 2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)}dx = 2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}} \Rightarrow$$

وبالاستفادة من العلاقة $\cosh(x+\pi i) = -\cosh(x)$ يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx + e^{a\pi i}.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = 2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = \frac{2\pi.e^{\frac{i.\pi a}{2}}}{1+e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}a}$$

ولكن بحسب خواص التكامل المحدد يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}a}$$

في التكامل $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx$ لنقوم بإحلال كل x ب $-x$ فنحصل على:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\cosh(x)}dx$$

ومن ثمَّ:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\cosh(x)}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}a} \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}+e^{ax}}{\cosh(x)}dx$$

$$= \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}a}$$

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)}dx = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}a} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}a}$$

ومن ثمَّ تكون قيمة التكامل من شكل الحالة العاشرة من تطبيقات مبرهنة الرواسب هي:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)}dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}a}$$

الحالة الحادية عشرة من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

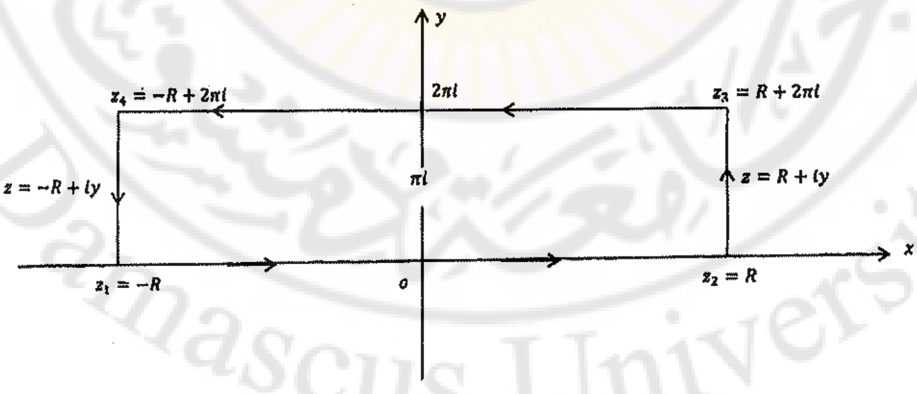
وهي عبارة عن حساب التكاملات من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{e^{ax}}}{\mathbf{1+e^{x}}}\mathbf{dx} \quad ; \quad \mathbf{0 < a < 1}$$

ليكن C هو الطريق المؤلف من المستطيل الذي رؤوسه هي النقاط :

$$z_1 = -R\,, z_2 = R\,, z_3 = R + 2\pi i\,, z_4 = -R + 2\pi i$$

كما في الشكل التالي (الشكل (٢٣)):



الشكل (٢٣)

لنأخذ التابع $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^{z}}$ وهو تابع تحليلي في المنطقة المحدودة المغلقة بالمنحني (الطريق) C باستثناء النقطة $z=\pi i$ وهي عبارةعن قطب بسيط ومهمتنا الآن حساب الراسب للتابع $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^{z}}$ عند النقطة $z=\pi i$ وذلك حسب الطريقة الخامسة من طرق حساب الرواسب وكون:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{e^{az}}{1+e^{z}} \quad , \quad \psi'(\pi i)\neq 0$$

ومن ثمَّ:

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i}f(z)=\frac{\varphi(\pi i)}{\psi'(\pi i)}=\left[\frac{e^{az}}{e^{z}}\right]_{z=\pi i}=\frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}}=-e^{a\pi i}$$

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد أن:

$$\int_C f(z)dz=\int_C \frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz=2\pi i.\operatorname{Res}_{z=i\pi}f(z)\Rightarrow$$

$$\int_C f(z)dz=2\pi i.(-e^{a\pi i})=-2\pi i.e^{a\pi i}\Rightarrow\int_C \frac{e^{az}}{1+e^{z}}dz$$
$$=-2\pi i.e^{a\pi i}$$

هذه من جهة ومن جهة أخرى:

$$\int_C f(z)dz=\int_{z_1z_2} f(z)dz+\int_{z_2z_3} f(z)dz+\int_{z_3z_4} f(z)dz+\int_{z_4z_1} f(z)dz$$
$$=-2\pi i.e^{a\pi i}\ \ldots(*)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة z_1z_2 يكون لدينا ما يلي:

$$\{-R\leq x\leq R \quad , \quad y=0\Rightarrow dy=0\} \quad \Rightarrow dz=dx$$

$$\Rightarrow \int_{z_1z_2} f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx \ \ldots.(1)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة z_2z_3 يكون:

$$\{0 \leq y \leq 2\pi \quad , \quad x = R \Rightarrow dx = 0\} \quad \Rightarrow dz = idy$$

$$\Rightarrow \int_{z_2z_3} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.idy \quad .... (2)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة z_3z_4 يكون لدينا مايلي:

$$\int_{z_3z_4} f(z)dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx \quad .... (3)$$

بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على القطعة z_4z_1 يكون:

$$\int_{z_4z_1} f(z)dz = \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}.idy \quad .... (4)$$

بتعويض كل من (1) و (2) و (3) و (4) في (*) نجد أن:

$$\int_C \frac{e^{az}}{1+e^z}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.idy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}.idy = -2\pi i.e^{a\pi i}$$

وبجعل $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.idy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx\right.$$

$$\left.+ \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}.idy\right] = -2\pi i.e^{a\pi i}$$

ومن ثمّ:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.idy + \lim_{R\to\infty}\int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}.\,idy=-2\pi i.\,e^{a\pi i}\quad\dots(**)$$

ولكن إن كلاً من التكاملين الثاني والرابع يسعيان إلى الصفر عندما $R \to \infty$ أي إن:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy\to 0\quad,\quad\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}.\,idy\to 0$$

$$R\to\infty\qquad\qquad R\to\infty$$

وبرهان ذلك سوف يتم أيضاً عن طريق تقدير التكامل، فمثلاً إذا تم أخذ أحد التكاملين السابقين وليكن:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy$$

ولنقم بتقدير هذا التكامل لدينا:

$$\left|1+e^{R+iy}\right|\geq|1|-\left|e^{R+iy}\right|=1-e^{R}$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\frac{1}{\left|1+e^{R+iy}\right|}\leq\frac{1}{1-e^{R}}\quad\dots(\text{أ})$$

$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy\right|\leq\int_{0}^{2\pi}\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,i\right|dy=\int_{0}^{2\pi}\frac{\left|e^{a(R+iy)}\right|}{\left|1+e^{R+iy}\right|}.\,|i|dy$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{aR}}{\left|1+e^{R+iy}\right|}dy\leq\text{(أ) بحسب}\leq\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{aR}}{1-e^{R}}dy=\frac{2\pi.\,e^{aR}}{1-e^{R}}$$

ومن ثمَّ يكون لدينا :

$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy\right|\leq\frac{2\pi.\,e^{aR}}{1-e^{R}}$$

وعندما $R \to \infty$ يكون:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{2\pi.\,e^{aR}}{1-e^{R}}$$

ولكن:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi.\,e^{aR}}{1-e^{R}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \left(\text{حالة عدم تعيين نطبق أوبيتال}\right)$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi.\,e^{aR}}{1-e^{R}} = \lim_{R\to\infty}\frac{2a\pi.\,e^{aR}}{-e^{R}} = \lim_{R\to\infty} -2a\pi.\,e^{(a-1)R} = 0$$

وذلك كون $0 < a < 1$ بالفرض وبالتالي:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy\right| = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}.\,idy \to 0$$

$$R \to \infty$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}.\,idy \to 0$$

$$R \to \infty$$

وبالعودة إلى (**) نجد:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -2\pi i.\,e^{a\pi i} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx + \int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx = -2\pi i.\,e^{a\pi i} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx - e^{2a\pi i}.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx = -2\pi i.\,e^{a\pi i} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}} dx = \frac{-2\pi i.\, e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}} = \frac{\pi}{\frac{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}}{2i}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ومن ثمَّ تكون قيمة التكامل من شكل الحالة الحادية عشرة هي:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

الحالة الثانية عشر من حالات تطبيقات مبرهنة الرواسب:

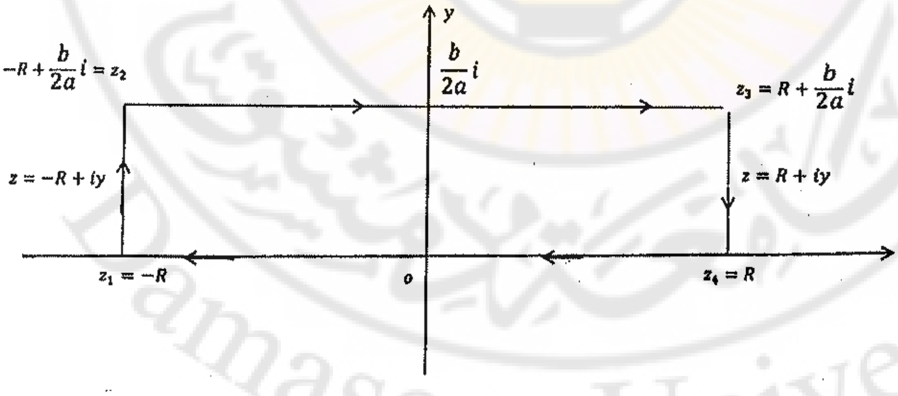
وهي عبارة عن حساب التكاملات من الشكل:

$$\mathbf{I = \int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}.\cos(bx)\, dx \quad ; \quad a > 0}$$

ليكن C هو حدود المستطيل الذي رؤوسه هي النقاط :

$$z_1 = -R\,, z_2 = -R + \frac{b}{2a} i\,, z_3 = R + \frac{b}{2a} i\,, z_4 = R \quad ; R > 0$$

كما في الشكل التالي (الشكل (٢٤)):



الشكل (٢٤)

لنأخذ التابع $f(z)=e^{-az^2}$ وبحيث $z=x+iy$

واستناداً إلى مبرهنة كوشي التكاملية(تحليل عقدي(١)) وكون التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C وبالتالي:

$$\int_C e^{-az^2}\,dz=0$$

هذا من جهة ومن جهةٍ أخرى نجد أن:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz+\int_{[z_2,z_3]} f(z)\,dz+\int_{[z_3,z_4]} f(z)\,dz$$
$$+\int_{[z_4,z_1]} f(z)\,dz=0\ \ ..(*)$$

والآن لنقم بتقويم (بتقدير) التكامل للتابع $f(z)$، وذلك على طول القطعتين المستقيمتين z_1z_2 و z_3z_4، فمثلاً لنقدر التكامل للتابع $f(z)$ على القطعة z_1z_2 وعلى هذه القطعة يكون:

$$\left\{0\le y\le\frac{b}{2a}\quad ,\qquad x=-R\ \Rightarrow dx=0\right\}\Rightarrow dz=i\,dy$$

ولدينا:

$$|f(z)|=\left|e^{-az^2}\right|=\left|e^{-a(-R+iy)^2}\right|=\left|e^{-a(R^2-2iRy-y^2)}\right|$$
$$=\left|e^{-aR^2}\right|.\left|e^{2iRay}\right|.\left|e^{ay^2}\right|=e^{-aR^2}.e^{ay^2}=e^{-a(R^2-y^2)}\ \Rightarrow$$
$$|f(z)|=e^{-a(R^2-y^2)}\le e^{-a\left(R^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}=e^{-aR^2+\frac{b^2}{4a}}\quad\Rightarrow$$
$$|f(z)|\le e^{-aR^2+\frac{b^2}{4a}}\quad ...(أ)$$

$$\left|\int_{[z_1,z_2]} e^{-az^2}dz\right|=\left|\int_0^{\frac{b}{2a}} e^{-a(-R+iy)^2}i.dy\right|\le\int_0^{\frac{b}{2a}}\left|e^{-a(-R+iy)^2}.i\right|dy$$

$$= \int_{0}^{\frac{b}{2a}} \left| e^{-a(-R+iy)^2} \right| . |i| dy \leq \text{(أ) بحسب} \leq \int_{0}^{\frac{b}{2a}} e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a}} dy$$

$$= \frac{b}{2a} . e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a}} \Rightarrow$$

$$\left| \int_{[z_1, z_2]} e^{-az^2} dz \right| \leq \frac{b}{2a} . e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a}}$$

وبجعل $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{[z_1, z_2]} e^{-az^2} dz \right| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{b}{2a} . e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a}}$$

ولكن:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{b}{2a} . e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a}} = 0 \quad ; \; a > 0 \; \text{بالفرض}$$

ومن ثمَّ:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{[z_1, z_2]} e^{-az^2} dz \right| = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{[z_1, z_2]} e^{-az^2} dz = 0$$

وبنفس الطريقة وبنفس المناقشة يمكن أن نبرهن أن التكامل للتابع $f(z)$ على القطعة المستقيمة $z_3 z_4$ أيضاً يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ أي:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[z_3, z_4]} e^{-az^2} dz = 0$$

أما بالنسبة لتكامل التابع $f(z) = e^{-az^2}$ على القطعة المستقيمة $z_2 z_3$ فعلى هذه القطعة يكون ما يلي:

$$\left\{ -R \leq x \leq R \quad , \quad y = \frac{b}{2a} \Rightarrow dy = 0 \right\} \Rightarrow dz = dx$$

ومن ثمّ:

$$\int_{[z_2,z_3]} e^{-az^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}i\right)^2}dx = \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi-\frac{b^2}{4a^2}\right)}dx$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi\right)}.e^{\frac{b^2}{4a}}dx = e^{\frac{b^2}{4a}}.\int_{-R}^{R} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi\right)}dx \quad ...(1)$$

أما بالنسبة لتكامل التابع $f(z) = e^{-az^2}$ على القطعة المستقيمة z_4z_1 فيكون:

$$\int_{[z_4,z_1]} e^{-az^2}dz = \int_{R}^{-R} e^{-ax^2}dx \quad ...(2)$$

بالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_3]} f(z)\,dz + \int_{[z_3,z_4]} f(z)\,dz + \int_{[z_4,z_1]} f(z)\,dz = 0$$

وبجعل $R \to \infty$ نجد:

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_3]} f(z)\,dz + \int_{[z_3,z_4]} f(z)\,dz + \int_{[z_4,z_1]} f(z)\,dz\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{[z_2,z_3]} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{[z_3,z_4]} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{[z_4,z_1]} f(z)\,dz = 0$$

ولكــن اســتطعنا أن نــبرهن أن التكامــل للتــابع $f(z)$ علــى القطعتــين $[z_1, z_2], [z_3, z_4]$ يسعيان إلى الصفر عندما $R \to \infty$ ومباشرة ومن (1) و (2) نجد أن:

$$\lim_{R\to\infty} e^{\frac{b^2}{4a}}.\int_{-R}^{R} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi\right)}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{R}^{-R} e^{-ax^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow e^{\frac{b^2}{4a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi\right)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e^{\frac{b^2}{4a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi\right)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x^2+\frac{b}{a}xi\right)}dx$$

$$= e^{-\frac{b^2}{4a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.e^{-bxi}dx = e^{-\frac{b^2}{4a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.[\cos(bx) - i.\sin(bx)]dx = e^{-\frac{b^2}{4a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.\cos(bx)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.\sin(bx)\,dx$$

$$= e^{-\frac{b^2}{4a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \quad ..(**)$$

ولكن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

ونعلم أن:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ومن ثمَّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

نعوض في (**) فنجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} . \cos(bx)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} . \sin(bx)\, dx = e^{-\frac{b^2}{4a}} . \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

بالمطابقة نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} . \cos(bx)\, dx = e^{-\frac{b^2}{4a}} . \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} . \cos(bx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}} . \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

٢. ١٢. تطبيقات مبرهنة الرواسب في حساب مجموع بعض المتسلسلات العددية العقدية:

ليكن لدينا التابع $f(z)$ تابعاً تحليلياً في جميع نقاط المستوي العقدي ماعدا عدداً محدوداً من النقاط $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$ التي تشكل أقطاباً للتابع $f(z)$، وكذلك لا توجد أي نقطة من هذه النقاط منطبقة على إحدى النقاط:

$$z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وأن التابع $f(z)$ يحقق الشرط التالي:

$$|z^2 . f(z)| \leq c \quad ; \quad c > 0$$

وذلك عندما $z \to \infty$.

عندئذٍ يكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) = -\pi.\left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_k} f_1(z)\right]$$

وحيث :

$$f_1(z) = f(z).\cot g(\pi z)$$

طبعاً مع العلم أن $f(z)$ هو التابع الناتج عن الحد العام للمتسلسلة أي عن التابع $f(n)$ وذلك بتبديل كل n بـ z .

٢ . ١٢ . ١ . أمثلة محلولة:

مثال (١):

باستخدام مبرهنة الرواسب احسب مجموع المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+4}$$

الحل:

لنشكل التابع $f(z)$ وهو عبارة عن:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2+4=0 \Rightarrow z_1 = 2i \quad , \quad z_2 = -2i$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة وأي نقطة منها لا توافق إحدى النقاط $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ والأكثر من ذلك:

$$|z^2.f(z)| = \left|z^2.\frac{1}{z^2+4}\right| = \left|z^2.\frac{1}{z^2.\left(1+\frac{4}{z^2}\right)}\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{4}{z^2}}\right|$$

ونلاحظ أن:

$\left|\frac{1}{1+\frac{4}{z^2}}\right| \leq 1$ وذلك عندما $z \to \infty$ ومن ثمَّ نستنتج أن جميع الشروط محققة

ويكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+4} = -\pi.\left[Res_{z=2i} f_1(z) + Res_{z=-2i} f_1(z)\right] \quad ...(*)$$

وحيث $f_1(z)$ كما نعلم هو:

$$f_1(z) = f(z).\operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2+4}$$

لنقوم بحساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند كل من $z_1 = 2i \ , \ z_2 = -2i$

وكما وجدنا هما عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$Res_{z=2i} f_1(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i).f_1(z) = \lim_{z\to 2i}(z-2i).\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2+4}$$
$$= \lim_{z\to 2i}\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z+2i} = \left[\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z+2i}\right]_{z=2i} = \frac{\operatorname{cotg}(2\pi i)}{4i}$$

$$Res_{z=-2i} f_1(z) = \lim_{z\to -2i}(z+2i).f_1(z) = \lim_{z\to -2i}(z+2i).\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2+4}$$
$$= \lim_{z\to -2i}\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z-2i} = \left[\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z-2i}\right]_{z=-2i} = \frac{\operatorname{cotg}(-2\pi i)}{-4i} = \frac{\operatorname{cotg}(2\pi i)}{4i}$$

وبالعودة وبتعويض الرواسب التي حصلنا عليها بـ (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+4} = -\pi.\left[\frac{\operatorname{cotg}(2\pi i)}{4i} + \frac{\operatorname{cotg}(2\pi i)}{4i}\right]$$

$$= -\pi.\left[\frac{-\operatorname{cth}(2\pi) - \operatorname{cth}(2\pi)}{4}\right] = \frac{\pi}{2}.\operatorname{cth}(2\pi)$$

مثال (٢):

احسب مجموع المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2 + 16}$$

الحل: لدينا:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 16}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + 16 = 0 \Rightarrow z_1 = 4i \quad , \quad z_2 = -4i$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة ولا توافق إحدى النقاط ... $z = 0, \pm 1, \pm 2,$

والأكثر من ذلك:

$$|z^2.f(z)| = \left|z^2.\frac{1}{z^2 + 16}\right| = \left|z^2.\frac{1}{z^2.\left(1 + \frac{16}{z^2}\right)}\right| = \left|\frac{1}{1 + \frac{16}{z^2}}\right|$$

ونلاحظ أن:

$\left|\frac{1}{1+\frac{16}{z^2}}\right| \leq 1$ وذلك عندما $z \to \infty$ وبالتالي جميع الشروط محققة ويكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2 + 16} = -\pi.\left[\operatorname{Res}_{z=4i} f_1(z) + \operatorname{Res}_{z=-4i} f_1(z)\right] \quad \dots (*)$$

وحيث $f_1(z)$ هو:

$$f_1(z) = f(z).\operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2 + 16}$$

لنقم بحساب الراسب للتابع $z_1(z)$ عند كل من $z_1 = 4i \;,\; z_2 = -4i$

وكما وجدنا هما عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=4i} f_1(z) = \lim_{z\to 4i}(z-4i).f_1(z) = \lim_{z\to 4i}(z-4i).\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z^2+16}$$

$$= \lim_{z\to 4i}\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z+4i} = \left[\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z+4i}\right]_{z=4i} = \frac{\mathrm{cotg}(4\pi i)}{8i}$$

$$\mathrm{Res}_{z=-4i} f_1(z) = \lim_{z\to -4i}(z+4i).f_1(z) = \lim_{z\to -4i}(z+4i).\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z^2+16}$$

$$= \lim_{z\to -4i}\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z-4i} = \left[\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{z-4i}\right]_{z=-4i} = \frac{\mathrm{cotg}(-4\pi i)}{-8i}$$

وبالعودة وبتعويض الرواسب التي حصلنا عليها بـ (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2+16} = -\pi.\left[\frac{\mathrm{cotg}(4\pi i)}{8i} - \frac{\mathrm{cotg}(-4\pi i)}{8i}\right]$$

$$= -\pi.\left[\frac{-i.\mathrm{cth}(4\pi) - i.\mathrm{cth}(4\pi)}{8i}\right] = \frac{\pi}{4}.\mathrm{cth}(4\pi) \;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^2+16} = \frac{\pi}{4}.\mathrm{cth}(4\pi)$$

مثال (٣):

أوجد مجموعة المتسلسلة التالية، وذلك باستخدام مبرهنة الرواسب وبحيث:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2} \quad ; \; b \neq 0 \;, a > 0$$

الحل:

لنشكل التابع $f(z)$ وهو عبارة عن:

$$f(z) = \frac{1}{(a+bz)^2}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(a+bz)^2 = 0 \Rightarrow a+bz = 0 \Rightarrow z = -{}^{a}/_{b}$$

وهي عبارة عن قطب مضاعف(مرتبة ثانية) وهذه النقطة لا توافق إحدى النقاط $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ والأكثر من ذلك:

$$|z^2 . f(z)| = \left|z^2 . \frac{1}{(a+bz)^2}\right| = \left|z^2 . \frac{1}{z^2 . \left(b+\frac{a}{z}\right)^2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\left(b+\frac{a}{z}\right)^2}\right| = \left|\frac{1}{\left(b+\frac{a}{z}\right)}\right|^2$$

ونلاحظ أن:

$\left|\frac{1}{\left(b+\frac{a}{z}\right)}\right|^2 \leq \frac{1}{b^2}$ وذلك عندما $z \to \infty$ ومن ثمَّ نستنتج أن جميع الشروط محققة ويكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = -\pi . \operatorname{Res}\left[f(z) . \operatorname{cotg}(\pi z) \ , z = \frac{-a}{b}\right] \ \dots (*)$$

لنقم بحساب الراسب عند $z = \frac{-a}{b}$ وكما وجدنا هي عبارة عن قطب مضاعف ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{-a}{b}} f(z) . \operatorname{cotg}(\pi z)$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} . \lim_{z \to \frac{-a}{b}} \frac{d}{dz}\left[\left(z+\frac{a}{b}\right)^2 . f(z) . \operatorname{cotg}(\pi z)\right]$$

$$= \lim_{z \to \frac{-a}{b}} \frac{d}{dz}\left[\left(z+\frac{a}{b}\right)^2 . \frac{1}{(a+bz)^2} . \operatorname{cotg}(\pi z)\right]$$

$$= \lim_{z\to\frac{-a}{b}} \frac{d}{dz}\left[\left(z+\frac{a}{b}\right)^2 . \frac{1}{b^2\left(\frac{a}{b}+z\right)^2} . \operatorname{cotg}(\pi z)\right]$$

$$= \lim_{z\to\frac{-a}{b}} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{b^2} . \operatorname{cotg}(\pi z)\right]$$

$$= \lim_{z\to\frac{-a}{b}} \left[\frac{-\pi}{b^2 \sin^2 \pi z}\right] = \frac{-\pi}{b^2 . \left[\sin\pi\left(-\frac{a}{b}\right)\right]^2} = \frac{-\pi}{b^2 . \left[\sin\frac{a\pi}{b}\right]^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{-a}{b}} f(z) . \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{-\pi}{b^2 . \left[\sin\frac{a\pi}{b}\right]^2}$$

وبالعودة وبتعويض الراسب الذي حصلنا عليه في (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = -\pi . \left[\frac{-\pi}{b^2 . \left[\sin\frac{a\pi}{b}\right]^2}\right] = \frac{\pi^2}{b^2 . \left[\sin\frac{a\pi}{b}\right]^2} = \left(\frac{\pi}{b . \sin\frac{a\pi}{b}}\right)^2$$

مثال (٤):

احسب مجموع المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2a}{a^2-n^2} \quad ; \quad a \neq 0, \pm 1, \dots$$

الحل:

لنشكل التابع $f(z)$ وهو عبارة عن:

$$f(z) = \frac{2a}{a^2-z^2}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$a^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z_1 = a \quad , \quad z_2 = -a$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة وأي نقطة منها لا توافق إحدى النقاط $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ وذلك من الفرض والأكثر من ذلك:

$$|z^2.f(z)| = \left|z^2.\frac{2a}{a^2 - z^2}\right| = \left|z^2.\frac{2a}{-z^2.\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)}\right| = \left|\frac{2a}{1 - \frac{a^2}{z^2}}\right|$$

ونلاحظ أن:

$\left|\frac{2a}{1-\frac{a^2}{z^2}}\right| \leq 2a$ وذلك عندما $z \to \infty$ ومن ثمَّ نستنتج أن جميع الشروط محققة

ويكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = -\pi.\left[Res_{z=a}f_1(z) + Res_{z=-a}f_1(z)\right] \quad ...(*)$$

وحيث $f_1(z)$ هو:

$$f_1(z) = f(z).\text{cotg}(\pi z) = \frac{2a}{a^2 - z^2}.\text{cotg}(\pi z)$$

لنقوم بحساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند كل من $z_1 = a \;\; , \;\; z_2 = -a$ وكما وجدنا هما عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$Res_{z=a}f_1(z) = \lim_{z\to a}(z-a).f_1(z) = \lim_{z\to a}(z-a).\frac{2a}{a^2 - z^2}.\text{cotg}(\pi z)$$

$$= \lim_{z\to a}(z-a).\frac{2a}{(a-z).(a+z)}.\text{cotg}(\pi z)$$

$$= \left[\frac{-2a.\text{cotg}(\pi z)}{z+a}\right]_{z=a} = \frac{-2a.\text{cotg}(a\pi)}{2a} = -\text{cotg}(a\pi)$$

$$Res_{z=-a}f_1(z) = \lim_{z\to -a}(z+a).f_1(z)$$

$$= \lim_{z\to -a}(z+a).\frac{2a}{(a-z).(a+z)}.\text{cotg}(\pi z)$$

$$= \left[\frac{2a.\text{cotg}(\pi z)}{a-z}\right]_{z=-a} = \frac{2a.\text{cotg}(-a\pi)}{2a} = \text{cotg}(-a\pi)$$

وبالعودة وبتعويض الرواسب التي حصلنا عليها في (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = -\pi.[-\text{cotg}(a\pi) + \text{cotg}(-a\pi)]$$
$$= -\pi.[-2\text{cotg}(a\pi)] = 2\pi.\text{cotg}(a\pi) \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = 2\pi.\text{cotg}(a\pi)$$

٢ . ١٣ . مبدأ الأرغومينت:

إن إحدى التطبيقات الهامة في نظرية الرواسب هي عبارة عن حساب التكامل الآتي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z).\frac{f'(z)}{f(z) - a}dz$$

حيث $f(z)$ تابع ميرومورفي في ساحة D محتواة في المستوي العقدي C ولتكن G ساحة محتواة بتراص في D، أما بالنسبة لـ C فهو عبارة عن منحنٍ مستمر غير مار بأقطاب التابع $f(z)$ أو بأي موضع a من مواضعه، وأما بالنسبة لـ $\varphi(z)$ فهو تابع وحيد التعيين وتحليلي في الساحة D وبما أن النقاط الشاذة للتابع المستكمل:

$$F(z) = \varphi(z).\frac{f'(z)}{f(z) - a}$$

في الساحة G هي عبارة عن أقطاب فقط، وهي تمثل مواضع a للتابع $f(z)$ وأقطابه كذلك الواقعة داخل هذه الساحة، وبما أن الساحة $G \subset D$ فإن تلك المواضع عددها منتهٍ حتماً وكذلك عدد الأقطاب.

- الهدف الرئيسي لمبدأ الأرغومنت هو الوصول إلى عدد أصفار تابع تحليلي داخل منطقة محدودة ومغلقة بمنحنٍ أو بطريق مغلق، وهذا يقودنا إلى المبرهنة التالية.

٢ . ١٣ . ١ . مبرهنة (١):

ليكن $f(z)$ تابعاً ميرومورفياً في الساحة D ولتكن الساحة G محتواة بتراص في D وحدودها المنحني C المستمر غير المار بأي صفر أو قطب للتابع $f(z)$ عندئذٍ يكون:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

حيث N عدد أصفار التابع $f(z)$ الواقعة في G و P هي عبارة عن عدد أقطاب التابع $f(z)$ والواقعة أيضاً داخل G وبحيث C هي الحدود الموجهة للساحة G.

٢ . ١٣ . ٢ . مبرهنة (٢) (مبدأ الأرغومينت):

الفرق بين عدد أصفار التابع $f(z)$ وعدد أقطابه الواقعة في الساحة Gمساوياً لتغير عمدة هذا التابع مقسوماً على 2π بنتيجة دوران على الحدود الموجهة للساحة G أي إن:

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

ومن الواضح أن الطرف الأيمن من العلاقة السابقة يمثل هندسياً عدد الدورات الكاملة حول النقطة $w = 0$ التي يصنعها الشعاع $w = f(z)$ عندما ترسم النقطة z الطريق C.

إحدى التطبيقات الهامة لمبدأ الأرغومنت هي مبرهنة روشيه التي تنص على ما يلي:

٢ . ١٣ . ٣ . مبرهنة (٣) (مبرهنة روشيه):

ليكن $f(z)$ و $g(z)$ تابعين وحيدي التعيين وتحليليين في الساحة المغلقة $\overline{G}$ ذات الحدود المستمرة C وليكن:

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C$$

عندئذٍ يكون للتابعين $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ نفس عدد الأصفار في الساحة G.

يستفاد من مبرهنة روشيه في حساب عدد أصفار تابع وحيد التعيين وتحليلي، كما يمكن برهان النظرية الأساسية في الجبر اعتماداً على مبرهنة روشيه.

٢ . ١٣ . ٤ . مثال (١):

أوجد عدد أصفار التابع التالي:

$$F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

والواقعة داخل دائرة الوحدة أي إيجاد الأصفار الواقعة داخل:

$$\{ \ |z| < 1 \ \}$$

الحل:

لإيجاد عدد أصفار الدالة $F(z)$ الواقعة داخل دائرة الوحدة سوف نقوم بالاستفادة من مبرهنة روشيه.

لنأخذ الدالتين $f(z)$ و $g(z)$ بحيث إن هاتين الدالتين وحيدتا التعيين وتحليليتان في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C وحيث $C: |z| = 1$ فإذا تم أخذ:

$$f(z) = -4z^5 \quad , \quad g(z) = z^8 + z^2 - 1$$

ونلاحظ أنه على دائرة الوحدة أي على المحيط C يكون:

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4|z^5| = 4$$

$$|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leq \text{بحسب خواص الطويلة} \leq |z^8| + |z^2| + 1$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3 \ \Rightarrow \ |g(z)| \leq 3$$

ونلاحظ أن:

$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall \ z \in C$ أي من أجل جميع نقاط المحيط C تتحقق المتراجحة السابقة ومن ثمّ بحسب مبرهنة روشيه فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z) + g(z)$ يساوي إلى عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعة داخل دائرة الوحدة.

وبما أن للتابع $f(z) = -4z^5$ جَذْرَ(صفرٍ) مكرراً عدداً من المرات مساوية لخمس مرات في مبدأ الإحداثيات فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ هي عبارة عن 5 أصفار وذلك بحسب روشيه.

- بالنسبة للمثال السابق يكون لدينا حرية الاختيار لكل من التابعين $f(z)$ و $g(z)$ عملية الاختيار يجب أن تؤدي بنا إلى تحقق الشروط في مبرهنة روشيه.

فمثلاً في المثال السابق يمكننا أخذ:

$$f(z) = z^8 - 4z^5 \quad , \quad g(z) = z^2 - 1$$

ونلاحظ أنه على دائرة الوحدة أي على المحيط C يكون:

$$|f(z)| = |z^8 - 4z^5| \leq |z^8| + 4|z^5| = 5$$
$$|g(z)| = |z^2 - 1| \leq |z^2| + 1 = 1 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; |g(z)| \leq 2$$

ونلاحظ أن:

$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall\ z \in C$ وبما أن للتابع $f(z) = z^8 - 4z^5$ ثمانية جذور، من هذه الجذور جذر مكرر عدد من المرات مساوية لخمس مرات في مبدأ الإحداثيات وواقعة داخل دائرة الوحدة وثلاثة جذور أخرى ولكن تقع خارج دائرة الوحدة فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ هي عبارة عن 5 أصفار وذلك بحسب روشيه.

٢ . ١٣ . ٥ . مثال (٢):

ما عدد جذور(أصفار)المعادلة:

$$F(z) = z^4 - 5z + 1$$

والواقعة داخل الحلقة $1 < |z| < 2$

الحل:

لنفرض أن عدد الجذور المطلوبة هو N وبحيث:

$$N = N_2 - N_1$$

نفرض أن N_1 هي عبارة عن عدد جذور المعادلة الواقعة داخل الدائرة(أو على القرص الأول) $|z| < 1$.

نفرض أن N_2 هي عبارة عن عدد جذور المعادلة الواقعة داخل الدائرة (أو على القرص الثاني) $|z| < 2$.

لنحسب كلاً من N_1 و N_2 على حدة:

من أجل N_1 نختار $f(x) = -5z \quad , \ g(z) = z^4 + 1$

ونلاحظ أنه على دائرة الوحدة أي على المحيط C_1 أي على محيط القرص الأول يكون:

$$|f(z)| = |-5z\,| = 5|z| = 5$$

$$|g(z)| = |z^4 + 1| \leq |z^4| + 1 = 1 + 1 = 2 \ \Rightarrow \ |g(z)| \leq 2$$

ونلاحظ أن:

أي من أجل جميع نقاط المحيط C_1 تتحقق $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall \ z \in C_1$ المتراجحة السابقة ومن ثمَّ بحسب مبرهنة روشيه فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z) + g(z)$ يساوي إلى عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعة في القرص $|z| < 1$.

وبما أن للتابع $f(z) = -5z$ جَذْرَ (صفرٍ) وحيداً وهو $z = 0$ فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ والواقعة داخل القرص $|z| < 1$هي عبارة عن جذر وحيد أي:

$$N_1 = 1$$

من أجل N_2 نختار $f(z) = z^4 \quad , \ g(z) = -5z + 1$

ونلاحظ أنه على المحيط C_2 أي على محيط القرص الثاني $|z| < 2$ يكون:

$$|f(z)| = |z^4\,| = 2^4 = 16$$

$$|g(z)| = |-5z + 1| \leq 5|z| + 1 = 10 + 1 = 11 \ \Rightarrow \ |g(z)| \leq 11$$

ونلاحظ أن:

أي من أجل جميع نقاط المحيط C_2 تتحقق $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall\ z \in C_2$ المتراجحة السابقة ومن ثمّ بحسب مبرهنة روشيه فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z) + g(z)$ يساوي إلى عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعة في القرص $|z| < 2$.

وبما أن للتابع $f(z) = z^4$ جذر(صفر) في مبدأ الإحداثيات مكرراً عدداً من المرات مساوياً لأربع مرات وهو $z = 0$ فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ والواقعة داخل القرص $|z| < 2$ هي عبارة عن:

$$N_2 = 4$$

ومن ثمّ عدد أصفار الدالة $F(z)$ الواقعة داخل الحلقة $1 < |z| < 2$ هي عبارة عن:

$$N = N_2 - N_1 = 4 - 1 = 3$$

٢ . ١٣ . ٦ . مثال (٣):

ليكن:

$$F(z) = z^8 - 3z + 1$$

أوجد عدد أصفار الدالة $F(z)$ والواقعة داخل دائرة الوحدة، ومن ثم أوجد هذه الأصفار الواقعة على قرص دائري نصف قطره 2.

الحل:

بالنسبة للأصفار الواقعة داخل دائرة الوحدة فتتعين بالشكل:

لنأخذ الدالتين $f(z)$ و $g(z)$ بحيث إن هاتين الدالتين وحيدتا التعيين وتحليليتان في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C وحيث $C: |z| = 1$ فإذا تم أخذ:

$$f(z) = -3z \quad , \quad g(z) = z^8 + 1$$

ونلاحظ أنه على دائرة الوحدة أي على المحيط C يكون:

$$|f(z)| = |-3z| = 3|z| = 3$$

$$|g(z)| = |z^8 + 1| \leq |z^8| + 1 = 1 + 1 = 2 \ \Rightarrow\ |g(z)| \leq 2$$

ونلاحظ أن:

$\forall\ z \in C \quad |f(z)| > |g(z)|$ أي من أجل جميع نقاط المحيط C تتحقق المتراجحة السابقة ومن ثمَّ بحسب مبرهنة روشيه فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z) + g(z)$ يساوي إلى عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعة داخل دائرة الوحدة.

وبما أن للتابع $f(z) = -3z$ جذر(صفر) في مبدأ الإحداثيات فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ هي عبارة عن 1 صفر واقع داخل دائرة الوحدة.

- في المثال السابق يمكننا أخذ $g(z) = z^8 \quad , \quad f(z) = -3z + 1$

أما بالنسبة لإيجاد عدد جذور التابع $F(z)$ على القرص الدائري الذي نصف قطره 2 فلنأخذ:

$$f(z) = z^8 \quad , \quad g(z) = -3z + 1$$

ونلاحظ أنه على المحيط أي $C: |z| = 2$ يكون:

$$|f(z)| = |z^8| = |z|^8 = 2^8$$

$$|g(z)| = |-3z + 1| \leq 3|z| + 1 = 6 + 1 = 7 \ \Rightarrow\ |g(z)| \leq 7$$

ونلاحظ أن:

$\forall\ z \in C \quad |f(z)| > |g(z)|$ وبما أن للتابع $f(z) = z^8$ جذر(صفر) في مبدأ الإحداثيات مكرراً ثماني مرات فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ هي عبارة عن ثمانية أصفار.

٢ . ١٣ . ٧ . مثال (٤):

ليكن:

$$F(z) = z^8 - 7z^5 - 3z^4 + 1$$

والمطلوب إيجاد أصفار الدالة $F(z)$ الواقعة داخل دائرة الوحدة.

الحل:

لنأخذ الدالتين $f(z)$ و $g(z)$ بحيث إن هاتين الدالتين وحيدتا التعيين وتحليليتان في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C وحيث $C: |z| = 1$ فإذا تم أخذ:

$$f(z) = z^8 - 7z^5 \quad , \quad g(z) = -3z^4 + 1$$

ونلاحظ أنه على دائرة الوحدة أي على المحيط C يكون:

$$|f(z)| = |z^8 - 7z^5| \leq |z|^8 + 7|z|^5 = 1 + 7 = 8$$
$$|g(z)| = |-3z^4 + 1| \leq 3|z^4| + 1 = 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow |g(z)| \leq 4$$

ونلاحظ أن:

$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall \ z \in C$ أي من أجل جميع نقاط المحيط C تتحقق المتراجحة السابقة ومن ثمَّ بحسب مبرهنة روشيه فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z) + g(z)$ يساوي إلى عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعة داخل دائرة الوحدة.

وبما أن للتابع $f(z) = z^8 - 7z^5 = z^5.(z^3 - 7)$ جذر(صفر) في مبدأ الإحداثيات مكرراً عدداً من المرات مساوية لخمس مرات فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ هي عبارة عن5 أصفار واقعة داخل دائرة الوحدة.

٢ . ١٣ . ٨ . مثال (٥):

أوجد عدد أصفار التابع $F(z)$ بحيث:

$$F(z) = z^4 - 2z - 5$$

وذلك داخل الدائرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها (2)

ثم داخل الدائرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها (1) أي على قرص الوحدة.

الحل:

بالنسبة للأصفار الواقعة داخل الدائرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها (2) فتتعين كما يلي:

لنأخذ الدالتين $f(z)$ و $g(z)$ بحيث إن هاتين الدالتين وحيدتا التعيين وتحليليتان في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C وحيث $C: |z| = 2$ فإذا تم أخذ:

$$f(z) = z^4 \quad , \quad g(z) = -2z - 5$$

ونلاحظ أنه على المحيط C يكون:

$$|f(z)| = |z^4| = |z|^4 = 2^4 = 16$$
$$|g(z)| = |-2z - 5| \leq 2|z| + 5 = 4 + 5 = 9 \quad \Rightarrow |g(z)| \leq 9$$

ونلاحظ أن:

$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall \; z \in C$ أي من أجل جميع نقاط المحيط C تتحقق المتراجحة السابقة ومن ثمَّ بحسب مبرهنة روشيه فإن عدد أصفار التابع $F(z) = f(z) + g(z)$ يساوي إلى عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعة داخل الدائرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها (2).

وبما أن للتابع $f(z) = z^4$ جذر(صفر) في مبدأ الإحداثيات مكرراً عدداً من المرات مساوية لأربع مرات فعندئذٍ عدد أصفار التابع $F(z)$ هي عبارة عن 4 صفر وذلك بحسب روشيه.

أما بالنسبة لإيجاد عدد جذور التابع$F(z)$ على قرص الوحدة فلنأخذ:

$$f(z) = -2z - 5 \quad , \quad g(z) = z^4$$

ونلاحظ أنه على المحيط أي$C: |z| = 1$ يكون:

$$|f(z)| = |-2z - 5| \leq 2|z| + 5 = 2 + 5 = 7 \quad \Rightarrow |f(z)| \leq 7$$
$$|g(z)| = |z^4| = 1$$

ونلاحظ أن:

$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall \; z \in C$ وبمـــا أن للتـــابع $f(z) = -2z - 5$ جذر(صفر) ولكن غير واقع على قرص الوحدة فعندئذٍ لا توجد أصفار للتابع $F(z)$ واقعة داخل دائرة الوحدة.

٢ . ١٤ . تمارين محلولة:

التمرين الأول:

أوجد مجموع المتسلسلة التالية باستخدام مبرهنة الرواسب.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}$$

الحل:

لكي نتمكن من استخدام مبرهنة الرواسب يجب أن نطلق من المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(n^2+1)^2}+\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}\right]_{n=0}+\sum_{n=+1}^{n=\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(n^2+1)^2}+1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}\ \ldots\ (*)$$

بالنسبة للسلسلة $\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(n^2+1)^2}$ إذا بدلنا كل n- = m فنجد:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\sum_{m=1}^{m=+\infty}\frac{1}{((-m)^2+1)^2}=\sum_{m=1}^{m=+\infty}\frac{1}{(m^2+1)^2}$$

وبما أن الدليل لا يؤثر في المجموع في المتسلسلة فيمكننا وضع في الأخيرة كل $n = m$ فيكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}$$

بالعودة والتعويض في (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}+1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}-1}{2} \qquad \ldots (**)$$

لنوجد عن طريق مبرهنة الرواسب مجموع المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}$$

لنشكل التابع $f(z)$ وهو عبارة عن:

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z^2+1)^2=0 \Rightarrow z^2+1=0 \Rightarrow z_1=i\ ,\ z_2=-i$$

وهي عبارة عن أقطاب من المرتبة الثانية وهذه النقاط لا توافق إحدى النقاط: $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ويمكن التحقق من بقية الشروط على التابع $f(z)$ وبناء على تحقق جميع الشروط يكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=-\pi[\operatorname{Res}_{z=i}f_1(z)+\operatorname{Res}_{z=-i}f_1(z)] \qquad \ldots (***)$$

وحيث: $f_1(z)=f(z).\cot g(\pi z)=\dfrac{\cot g\pi z}{(z^2+1)^2}$

لنقم بحساب الراسب عند $z = i$ وكما وجدنا هي عبارة عن قطب مضاعف ومن ثمّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\operatorname{Res}_{z=i}f(z).\cot g(\pi z)=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\cdot f(z)\cdot\cot g(\pi z)\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\cdot\frac{1}{(z^2+1)^2}\cdot\cot g(\pi z)\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\cot g(\pi z)\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{-\pi}{\sin^2\pi z}\cdot(z+i)^2-2(z+i)\cot g(\pi z)}{(z+i)^4}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{-\pi}{\sin^2\pi z}\cdot(z+i)-2\cot g(\pi z)}{(z+i)^3}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{-\pi}{\sin^2\pi z}\cdot(z+i)-2\operatorname{cotg}(\pi z)}{(z+i)^3}\right]_{z=i}=\frac{\frac{-\pi}{\sin^2 i\pi}\cdot 2i-2\operatorname{cotg}(i\pi)}{(2i)^3}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}\cdot 2i+2i\operatorname{cth}(\pi)}{-8i}=\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}\cdot 2i+\operatorname{cth}(\pi)}{4}$$

$$\operatorname{Re}s_{z=i}f(z).\cot g(\pi z)=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[(z+i)^2\cdot f(z)\cdot\cot g(\pi z)\right]$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[(z+i)^2\cdot\frac{1}{(z^2+1)^2}\cdot\operatorname{cotg}(\pi z)\right]=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\operatorname{cotg}(\pi z)\right]$$

$$=\lim_{z\to -i}\left[\frac{\frac{-\pi}{\sin^2\pi z}\cdot(z-i)^2-2(z-i)\cot g(\pi z)}{(z-i)^4}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{-\pi}{\sin^2\pi z}\cdot(z-i)-2\cot g(\pi z)}{(z-i)^3}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{\frac{-\pi}{\sin^2 \pi z}\cdot(z-i)-2\operatorname{cotg}(\pi z)}{(z-i)^3}\right]_{z=-i}=\frac{\frac{-\pi}{\sin^2-i\pi}\cdot(-2i)-2\operatorname{cotg}(-i\pi)}{(-2i)^3}$$

$$=\frac{\frac{-\pi}{\sinh^2\pi}\cdot 2i-2i\operatorname{cth}(\pi)}{8i}=-\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}\cdot 2i+\operatorname{cth}(\pi)}{4}$$

وبالعودة وبتعويض الرواسب التي حصلنا عليها بـ (***) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=-\pi\cdot\left[-\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}+\operatorname{cth}(\pi)}{4}-\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}+\operatorname{cth}(\pi)}{4}\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}+\operatorname{cth}(\pi)}{2}\right]\Rightarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\pi\cdot\left[\frac{\frac{\pi}{\sinh^2\pi}+\operatorname{cth}(\pi)}{2}\right]=\frac{\pi}{2\sinh^2\pi}+\frac{\pi\cdot\operatorname{cth}(\pi)}{2}$$

وبالعودة وتعويض الأخيرة في (**) نجد أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}=\frac{\frac{\pi^2}{2\sinh^2\pi}+\frac{\pi\cdot\operatorname{cth}(\pi)}{2}-1}{2}=\frac{\pi^2}{4\sinh^2\pi}+\frac{\pi}{4}\operatorname{cth}(\pi)-\frac{1}{2}$$

تمرين (٢):

أوجد مجموع السلسلة التالية عن طريق مبرهنة الرواسب:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2} \quad ; \quad a\in R$$ وليس صحيح

قبل الخوض في عرض الحل لهذا التمرين لا بد من استعراض المبرهنة التالية:

إضافي: مبرهنة (تقبل دون ذكر البرهان):

إذا كانت الدالة $f(z)$ تحقق نفس الشروط المعطاة ضمن الحالة الخاصة بحساب مجموع سلسلة عن طريق مبرهنة الرواسب عندئذ يكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n\cdot f(n)=-\pi\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k}f_1(z)\right]$$

وحيث $f_1(z)$ هو عبارة عن $f_1(z)=f(z).\csc(\pi z)=\dfrac{f(z)}{\sin(\pi z)}$ و $f(z)$ هو التابع الناتج عن $f(n)$ بتبديل كل n بـ z وبحيث أن الرواسب تؤخذ للتابع $f_1(z)$ عند جميع أقطاب الدالة $f(z)$.

بالعودة إلى التمرين نجد أنه يأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n.f(n)$$

لنشكل التابع $f(z)$ وهو عبارة عن:

$$f(z)=\frac{1}{(z+a)^2}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$(z+a)^2=0\Rightarrow z+a=0\Rightarrow z=-a$$

وهي عبارة عن قطب مضاعف (مرتبة ثانية) وهذه النقطة لا توافق إحدى النقاط $z=0,\pm1,\pm2,\ldots$ والأكثر من ذلك:

$$\left|z^2\cdot f(z)\right|=\left|z^2\cdot\frac{1}{(z+a)^2}\right|=\left|z^2\cdot\frac{1}{z^2\cdot\left(1+\frac{a}{z}\right)^2}\right|=\left|\frac{1}{\left(1+\frac{a}{z}\right)^2}\right|=\left|\frac{1}{\left(1+\frac{a}{z}\right)}\right|^2$$

ونلاحظ أن:

$1\leq\left|\frac{1}{(1+\frac{a}{z})}\right|^2$ وذلك عندما $z\to\infty$ ومن ثم نستنتج أن جميع الشروط محققة

ويكون بحسب المبرهنة السابقة:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}=-\pi\cdot \mathrm{Res}[f(z).\csc(\pi z)\ ,\ z=\text{-}a]\quad\ldots\quad(*)$$

لنقم بحساب الراسب عند $z=-a$ وكما وجدنا هي عبارة عن قطب مضاعف ومن ثمَّ حسب الطريقة الرابعة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\mathrm{Res}_{z=-a}f(z)\cdot\csc(\pi z)=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to -a}\frac{d}{dz}\left[(z+a)^2\cdot f(z)\csc(\pi z)\right]$$

$$=\lim_{z\to -a}\frac{d}{dz}\left[(z+a)^2\cdot\frac{1}{(z+a)^2}\cdot\csc(\pi z)\right]$$

$$=\lim_{z\to -a}\frac{d}{dz}[\csc(\pi z)]=\lim_{z\to -a}\left[\frac{-\pi.\cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}\right]$$

$$=\frac{-\pi.\cos(-a\pi)}{\sin^2(-a\pi)}=\frac{-\pi.\cos(a\pi)}{\sin^2(a\pi)}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Res}_{z=-a}f(z)\cdot\csc(\pi z)=\frac{-\pi.\cos(a\pi)}{\sin^2(a\pi)}$$

وبالعودة وبتعويض الراسب الذي حصلنا عليه ب (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = -\pi \cdot \left[\frac{-\pi \cdot \cos(a\pi)}{\sin^2(a\pi)} \right] = \frac{\pi^2 \cdot \cos(a\pi)}{\sin^2(a\pi)}$$

تمرين (٣):

أوجد مجموع السلسلة التالية باستخدام مبرهنة الرواسب وبحيث:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)\cdot(n^2+b^2)} \quad ; \ a, b \in R$$ وليست صحيحة

الحل:

إن السلسلة السابقة تكتب بالشكل التالي:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)\cdot(n^2+b^2)}$$

$$= \left(\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)} \right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)} \right) \qquad \dots (*)$$

لنقم بحساب مجموع السلسلة التالية:

$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)}$ وذلك عن طريق مبرهنة الرواسب.

لنشكل التابع $f(z)$ وهو عبارة عن:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$$

والنقاط الشاذة للتابع $f(z)$ هي عبارة عن حلول المعادلة:

$$z^2 + a^2 = 0 \Rightarrow z_1 = ai \ , \ z_2 = -ai$$

وهي عبارة عن أقطاب بسيطة وأي نقطة منها لا توافق إحدى النقاط $z = 0,$ $\pm 1, \pm 2, \dots$ وذلك لأنه من الفرض وليس صحيحاً $a \in R$ والأكثر من ذلك:

$$\left|z^2 \cdot f(Z)\right| = \left|z^2 \cdot \frac{1}{z^2 + a^2}\right| = \left|z^2 \cdot \frac{1}{z^2 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)}\right| = \left|\frac{1}{1 + \frac{a^2}{z^2}}\right|$$

ونلاحظ أن:

$\left|\frac{1}{1 + \frac{a^2}{z^2}}\right| \leq 1$ وذلك عندما $z \to \infty$ ومن ثمَّ نستنتج أن جميع الشروط محققة ويكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \cdot \left[\operatorname{Res}_{z=ai} f_1(z) + \operatorname{Res}_{z=-ai} f_1(z)\right] \quad \ldots (**)$$

وحيث $f_1(z)$ كما نعلم هو:

$$f_1(z) = f(z) \cdot \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2 + a^2}$$

لنقم بحساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند كل من $z_2 = -ai$، $z_1 = ai$ كما وجدنا هما عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\operatorname{Res}_{z=ai} f_1(z) = \lim_{z \to ai} (z - ai) \cdot f_1(z) = \lim_{z \to ai} (z - ai) \cdot \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2 + a^2}$$

$$= \lim_{z \to ai} \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z + ai} = \left[\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z + ai}\right]_{z=ai} = \frac{\operatorname{cotg}(a\pi i)}{2ai}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-ai} f_1(z) = \lim_{z \to -ai} (z + ai) \cdot f_1(z) = \lim_{z \to -ai} (z + ai) \cdot \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2 + a^2}$$

$$= \lim_{z \to -ai} \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z - ai} = \left[\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z - ai}\right]_{z=-ai} = \frac{\operatorname{cotg}(-a\pi i)}{-2ai}$$

$$= \frac{\cot g(a\pi i)}{2ai}$$

وبالعودة وبتعويض الرواسب التي حصلنا عليها بـ (**) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\pi\left[\frac{\cot g(a\pi i)}{2ai} + \frac{\cot g(a\pi i)}{2ai}\right]$$

$$= -\pi \cdot \left[\frac{-\operatorname{cth}(a\pi) - \operatorname{cth}(a\pi)}{2a}\right] = \frac{\pi}{a} \cdot \operatorname{cth}(a\pi)$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(m^2+b^2)} = \frac{\pi}{b} \cdot \operatorname{cth}(b\pi)$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)\cdot(n^2+b^2)} = \left[\frac{\pi}{a} \cdot \operatorname{cth}(a\pi)\right] \cdot \left[\frac{\pi}{a} \cdot \operatorname{cth}(b\pi)\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{a.b} \cdot \operatorname{cth}(a\pi) \cdot \operatorname{cth}(b\pi)$$

التمرين الرابع:

باستخدام مبرهنة الرواسب ما هو مجموع المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n \cdot \sin(n\theta)}{n^2+a^2} \quad ; \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

الحل:

لكي نتمكن من استخدام مبرهنة الرواسب يجب أن ننطلق من المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n \cdot \sin(n\theta)}{n^2+a^2} = -\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot n \cdot \sin(n\theta)}{n^2+a^2}$$

$$=-\left(\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}+\left[\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}\right]_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=$$

$$=-\left[\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}\right]\quad\ldots(*)$$

بالنسبة للسلسلة $\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}$ إذا بدلنا كل $m = -n$ فنجد:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=\sum_{m=1}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{-m}\cdot(-m)\cdot\sin(-m\theta)}{m^2+a^2}$$

$$=\sum_{m=1}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m\cdot m\cdot\sin(m\theta)}{m^2+a^2}$$

وبما أن الدليل لا يؤثر في المجموع في المتسلسلة فيمكننا وضع في الأخيرة كل $m = n$ فيكون:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}$$

بالعودة والتعويض في (*) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}$$

$$=-\left[\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}+\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}\right]$$

$$=-2\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=-\frac{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}}{2}\quad\ldots\ (**)$$

لنوجد:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}$$

عن طريق مبرهنة الرواسب ولكن الأخيرة هي من الشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n\cdot f(n)$$

ومن ثمَّ يجب أن نستفيد من المبرهنة التي تم عرضها في التمرين الثاني، وبناء على تحقق جميع الشروط على التابع $f(z)$ الناتج عن $f(n)=\frac{n.\sin(n\theta)}{n^2+a^2}$ بتبديل كل n بـ z (يمكن التحقق من الشروط المعروضة في الحالة الخاصة بإيجاد مجموع سلسلة حقيقية) ومن ثمَّ يكون بحسب المبرهنة المعروضة في التمرين الثاني ما يلي:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=-\pi\left[\operatorname{Res}_{z=ai}f_1(z)+\operatorname{Res}_{=-ai}f_1(z)\right]\ldots$$
(***)

وحيث $f_1(z) = f(z)\ .\ \csc(\pi z)$.

لنقم بحساب الراسب للتابع $f_1(z)$ عند كل من $z_2 = -ai$ ،$z_1 = ai$ وهما عبارة عن أقطاب بسيطة ومن ثمَّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد أن:

$$\operatorname{Res}_{z=ai}f_1(z)=\lim_{z\to ai}(z-ai)\cdot f_1(z)=\lim_{z\to ai}(z-ai)\cdot\frac{z.\sin(z\theta)}{z^2+a}\csc(\pi z)$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{z.\sin(z\theta)}{z+ai}\cdot\frac{1}{\sin(\pi z)}=\left[\frac{z.\sin(z\theta)}{z+ai}\cdot\frac{1}{\sin(\pi z)}\right]_{z=ai}$$

$$=\frac{ai.\sin(a\theta i)}{2ai}\cdot\frac{1}{\sin(\pi ai)}=\frac{\sinh(a\theta)}{2\sinh(a\pi)}$$

نتيجة:

إذا كانت $a = x + iy$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ وكانت $\bar{a} = x - iy$ نقطة شاذة معزولة للتابع $f(z)$ والنقطتان السابقتان هما عبارة عن قطب للتابع $f(z)$ فإن:

$$\text{Res}[f(z),\bar{a}]=\overline{\text{Res}[f(z),a]}$$

ومن ثم فإن:

$$\text{Res}_{z=-ai}f_1(z)=\overline{\text{Res}_{z=ai}f_1(z)}=\overline{\left(\frac{\sinh(a\theta)}{2\sinh(a\pi)}\right)}=\frac{\sinh(a\theta)}{2\sinh(a\pi)}$$

وبالعودة وبتعويض الرواسب التي حصلنا عليها بـ (***) نجد أن:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n.n.\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=-\pi\cdot\left[\frac{\sinh(a\theta)}{2\sinh(a\pi)}+\frac{\sinh(a\theta)}{2\sinh(a\pi)}\right]=-\pi\cdot\frac{\sinh(a\theta)}{\sinh(a\pi)}$$

بالعودة إلى (**) نجد أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.n.\sin(n\theta)}{n^2+a^2}=-\frac{\left(-\pi\cdot\frac{\sinh(a\theta)}{\sinh(a\pi)}\right)}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sinh(a\theta)}{\sinh(a\pi)}$$

ملاحظة هامة (١): الرجاء عدم الخلط بين طريقة إيجاد مجموع المتسلسلة:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}f(n)\quad\ldots\quad(1)$$

وطريقة إيجاد مجموع المتسلسلة:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^m.f(n)\quad\ldots\quad(2)$$

والرابط الوحيد الموجود بين الشكلين السابقين هي الشروط المفروضة على التابع $f(z)$ الناتج عن $f(n)$ في الحالتين السابقتين أما قيمة الأولى كما وجدنا:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) = -\pi\left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z).\cot g(\pi z), z_k]\right]$$

وقيمة المتسلسلة (2) هي:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n \cdot f(n) = -\pi \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z).\csc g(\pi z), z_k]\right]$$

ملاحظة هامة (٢):

عند مكاملة التوابع متعددة القيم يجدر الانتباه إلى ما يلي:

١ ـ ينبغي أن نختار من التابع أحد فروعه لنتمكن من تطبيق كوشي أو نظرية الرواسب.

٢ ـ ينبغي أن يكون الفرع الذي اخترناه مستمراً في المنطقة، بغض النظر عن النقط الشاذة، وعلى محيطها، ولذلك فإننا نضطر من أجل ذلك إلى إحداث شريط في الساحة.

٣ ـ ينبغي عند حساب الراسب أن يتم ذلك منسجماً مع التعيين الذي اخترناه.

التمرين الخامس:

احسب قيمة التكامل التالي باستخدام مبرهنة الرواسب:

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2 - 1}}$$

الحل:

لحساب التكامل السابق ننظر في التابع:

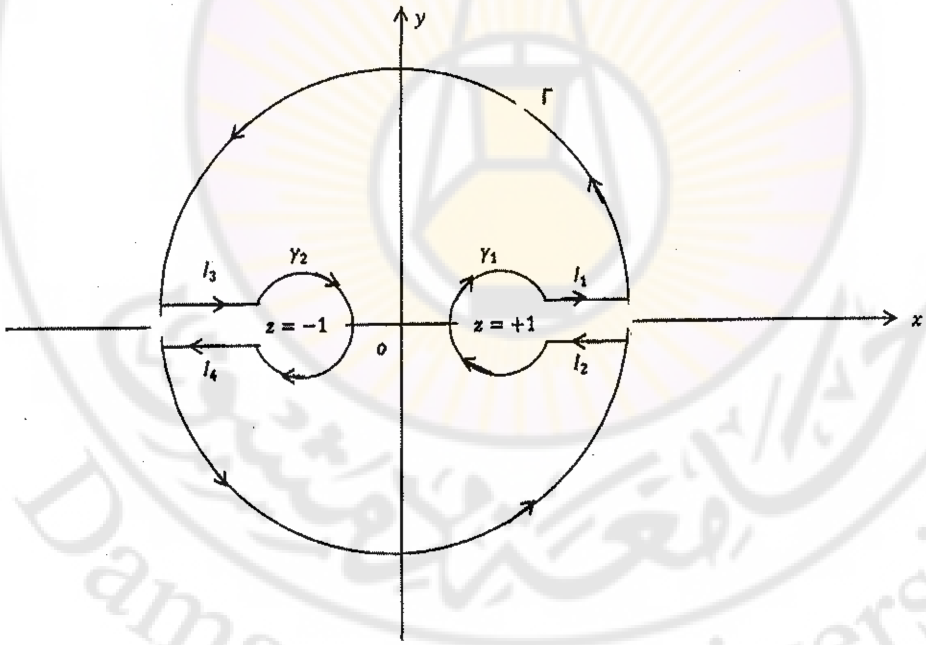
$$f(z) = \frac{1}{z.\sqrt{z^2 - 1}}$$

إن لهذا التابع كما نلاحظ نقطتين حرجتين في الموضعين $z = \pm 1$ ونظراً إلى أن حدي التكامل 1 و $+\infty$ فإننا نقترح أن يكون طريق المكاملة C مؤلفاً من ثلاث دوائر غير متحدة بالمركز، ولتكن Γ و γ_1 و γ_2 بحيث إن Γ هي دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها R و γ_1 هي دائرة مركزها $z = 1$ ونصف قطرها r_1 و γ_2 هي دائرة مركزها $z = -1$ ونصف قطرها r_2 وطريق المكاملة أيضاً مؤلف من أربع قطع مستقيمة ممتدة على المحور الحقيقي وهي المجالات التالية:

$$I_1 = [r_1 + 1, R] \ , \ I_2 = [R, r_1 + 1]$$
$$I_3 = [-R, -1 + r_2] \ , \ I_4 = [-1 + r_2, -R]$$

وبحيث R تكون أكبر ما يمكن أي نجعل $R \to \infty$ وكل من r_1, r_2 أصغر ما يمكن أي نجعل $r_1, r_2 \to 0$.

كما في الشكل التالي (الشكل (٢٥)):



الشكل (٢٥)

ولاختيار أحد فروع التابع متعدد القيم $f(z)$ نضع:

$$z-1=r_1\cdot e^{i(\theta_1+2k_1\pi)}\quad,\quad z+1=r_2\cdot e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$$

فيكون:

$$\sqrt{z^2-1}=\sqrt{r_1\cdot r_2}\cdot e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\pi k\right)}$$

وحيث k عدد صحيح ويكون $k = k_1 + k_2$.

لنفرض أنه إذا كانت النقطة z على I_1 فإن $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

لنلاحظ أن أحد فرعي التابع $\sqrt{z^2-1}$ يوافق $k = 0$ وأن الآخر يوافق $k = 1$

ولننطلق من الفرع الذي يوافق $k = 0$ عندئذٍ إذا كانت z تقع على I_1 فإن:

$$\sqrt{z^2-1}=\sqrt{x^2-1}$$

وإذا كانت z تقع على I_3 فإن $\theta_1 = \pi\ ,\ \theta_2 = \pi$ ومن ثمَّ:

$$\sqrt{z^2-1}=-\sqrt{x^2-1}$$

وإذا كانت z تقع على I_4 فإن $\theta_1 = \pi\ ,\ \theta_2 = -\pi$ ومن ثمَّ:

$$\sqrt{z^2-1}=\sqrt{x^2-1}$$

وإذا كانت z تقع على I_2 فإن $\theta_1 = 2\pi\ ,\ \theta_2 = 0$ ومن ثمَّ:

$$\sqrt{z^2-1}=-\sqrt{x^2-1}$$

ومن ثمَّ يكون لدينا:

$$f_{I_1}(z)=f_{I_1}(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=f(x),$$

$$f_{I_2}(z)=f_{I_2}(x)=\frac{1}{-x\cdot\sqrt{x^2-1}}=-f(x)$$

$$f_{I_3}(z)=f_{I_3}(x)=\frac{1}{-x\cdot\sqrt{x^2-1}}=-f(x),f_{I_4}(z)=f_{I_4}(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=f(x)$$

ونلاحظ أن للتابع f(z) قطباً بسيطاً في النقطة $z = 0$ ومن ثمّ حسب الطريقة الثالثة من طرق حساب الرواسب نجد:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z.f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{i} = -i$$

وبتطبيق مبرهنة الرواسب نجد:

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{1}{z\cdot\sqrt{z^2-1}}dz = 2\pi i.R(0) = 2\pi i.(-i) = 2\pi$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى نجد:

$$\int_C f(z)dz = \int_{I_1} f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{I_3} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{I_4} f(z)dz$$
$$+ \int_{I_2} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi \Rightarrow$$

$$\int_{1+r_1} f_{I_1}(x)dx + \int_{\Gamma} f(x)dx + \int_{-R}^{-1-r_2} f_{I_3}(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{-1-r_2}^{-R} f_{I_4}(x)dx$$
$$+ \int_{R}^{1+r_1} f_{I_2}(x)dx + \int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi$$

وبجعل $r_1 \to 0$ و $r_2 \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\lim_{\substack{r_1\to 0\\ r_2\to 0\\ R\to 0}} \left[\int_{1+r_1} f_{I_1}(x)dx + \int_{\Gamma} f(x)dx + \int_{-R}^{-1-r_2} f_{I_3}(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{-1-r_2}^{-R} f_{I_4}(x)dx \right.$$
$$\left. + \int_{R}^{1+r_1} f_{I_2}(x)dx + \int_{\gamma_1} f(z)dz \right] = 2\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{r_1\to 0\\ R\to\infty}} \int_{1+r_1}^{R} f_{I_1}(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz + \lim_{\substack{r_2\to 0\\ R\to\infty}} \int_{-R}^{-1-r_2} f_{I_3}(x)dx + \lim_{r_2\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

$$+\lim_{\substack{r_2\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-1-r_2}^{-R} f_{I_4}(x)dx+\lim_{\substack{r_1\to 0\\ R\to\infty}}\int_{R}^{1+r_1} f_{I_2}(x)dx+\lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)dz=2\pi$$

ولكن إذا عدنا للوراء إلى نظرية جوردان فنلاحظ أن:

$f(z)$ .z يسعى إلى الصفر عندما $\infty \to R$ فإن التكامل للتابع $f(z)$ على Γ يسعى إلى الصفر عندما $\infty \to R$ (حسب جوردان).

وكذلك بما أن $f(z)$. $(z-1)$ يسعى إلى الصفر عندما $0 \to r_1$ فإن التكامل للتابع $f(z)$ على γ_1 يسعى إلى الصفر عندما $0 \to r_1$ (حسب جوردان).

وكذلك بما أن $f(z)$. $(z+1)$ يسعى إلى الصفر عندما $0 \to r_2$ فإن التكامل للتابع $f(z)$ على γ_2 يسعى إلى الصفر عندما $0 \to r_2$ (حسب جوردان).

وبالتالي نستنتج أن:

$$\lim_{\substack{r_1\to 0\\ R\to\infty}}\int_{1+r_1}^{R} f_{I_1}(x)dx+\lim_{\substack{r_2\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-R}^{-1-r_2} f_{I_3}(x)dx+\lim_{\substack{r_2\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-1-r_2}^{-R} f_{I_4}(x)dx$$

$$+\lim_{\substack{r_1\to 0\\ R\to\infty}}\int_{R}^{1+r_1} f_{I_2}(x)dx=2\pi \Rightarrow$$

$$\int_{1}^{\infty} f_{I_1}(x)dx+\int_{-\infty}^{-1} f_{I_3}(x)dx+\int_{-1}^{-\infty} f_{I_4}(x)dx+\int_{\infty}^{1} f_{I_2}(x)dx=2\pi$$

ولكن وجدنا سابقاً:

$$f_{I_1}(z)=f_{I_1}(x)=f(x) \quad , \quad f_{I_2}(z)=f_{I_2}(x)=-f(x)$$
$$f_{I_3}(z)=f_{I_3}(x)=-f(x) \quad , \quad f_{I_4}(z)=f_{I_2}(x)=f(x)$$

بالعودة والتعويض نجد أن:

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx-\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{-\infty} f(x)dx-\int_{\infty}^{1} f(x)dx=2\pi \Rightarrow$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}=2\pi\Rightarrow$$

$$4\int_1^{\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي: $I=\frac{\pi}{2}$.

التمرين السادس:

احسب القيمة الرئيسية للتكامل التالي:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\quad ; \quad 0<\alpha<1$$

الحل:

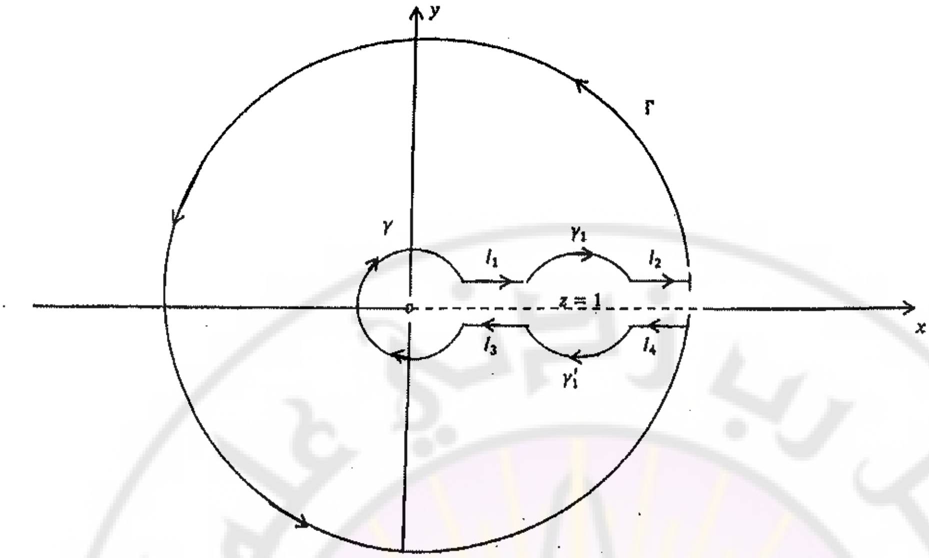
إن التكامل السابق هو تكامل شاذ (الشذوذ للتكامل السابق في النقطة $x = 1$) ولحساب قيمة التكامل السابق نأخذ التابع المساعد التالي:

$$f_1(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{1-z}=h(z).f(z)$$

لنأخذ طريق المكاملة C المؤلف من دائرتين متحدتين بالمركز ولتكن Γ و γ بحيث إن Γ هي دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها R و γ هي دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها r ومؤلف من قوسين دائريين γ_1 و $\gamma`_1$ مركزهما $z = 1$ ونصف قطرهما هو r_1 وطريق المكاملة أيضاً مؤلف من أربع قطع مستقيمة ممتدة على المحور الحقيقي وهي المجالات التالية:

$$I_1=[r,\ 1-r_1]\quad ,\quad I_2=[1+r_1,\ R]$$
$$I_3=[1-r_1,\ r]\quad ,\quad I_4=[R,\ 1+r_1]$$

وبحيث R تكون أكبر ما يمكن أي نجعل $R\rightarrow\infty$ وكل من $r,\ r_1$ أصغر ما يمكن أي نجعل $r, r_1\rightarrow 0$. كما في الشكل التالي (شكل (٢٦)).



الشكل (٢٦)

لنعزل في المنطقة D المحدودة بالمنحني C فرعاً تحليلياً من فروع التابع $z^{\alpha-1}$ يأخذ قيماً موجبة على الجزء العلوي للمقطع وليكن:

$$h(z) = z^{\alpha-1}$$

وعليه يكون:

$f_1(x) = h(x) . f(x) = x^{\alpha-1} . f(x)$ على الجزء العلوي للمقطع

$f_1(\tilde{x}) = h(\tilde{x}).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.h(x).f(x) = e^{2\pi\alpha i}.f_1(x)$ وذلك على الجزء السفلي للمقطع.

ومع ملاحظة أن التابع المستكمل $f_1(z) = \dfrac{z^{\alpha-1}}{1-z}$ تحليلي في المنطقة D المحدودة بالمنحني C ومن ثمَّ بحسب نظرية كوشي نجد:

$$\int_C f_1(z)dz = 0 \Rightarrow \int_C \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}dz = 0$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى نجد:

$$\int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{I_4} f_1(\tilde{x})dx + \int_{\gamma_1'} f_1(z)dz + \int_{I_3} f_1(\tilde{x})dx + \int_{\gamma} f_1(z)dz + \int_{I_1} f_1(x)dx$$

$$+ \int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \int_{I_2} f_1(x)dx = 0$$

وبجعل $r_1 \to 0$ و $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r_1\to 0\\ R\to\infty}} \left[\int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{I_4} f_1(\tilde{x})dx + \int_{\gamma_1'} f_1(z)dz + \int_{I_3} f_1(\tilde{x})dx + \int_{\gamma} f_1(z)dz \right.$$

$$\left. + \int_{I_1} f_1(x)dx + \int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \int_{I_2} f_1(x)dx \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \lim_{\substack{R\to\infty\\ r_1\to 0}} \int_{I_4} f_1(\tilde{x})dx + \lim_{r_1\to 0} \int_{\gamma_1'} f_1(z)dz + \lim_{\substack{r\to 0\\ r_1\to 0}} \int_{I_3} f_1(\tilde{x})dx + \lim_{r\to 0} \int_{\gamma} f_1(z)dz$$

$$+ \lim_{\substack{r\to 0\\ r_1\to 0}} \int_{I_1} f_1(x)dx + \lim_{r_1\to 0} \int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \lim_{\substack{r_1\to 0\\ R\to\infty}} \int_{I_2} f_1(x)dx = 0 \qquad \ldots (*)$$

وبسهولة يمكن التأكد من أن التكامل للتابع $f_1(z)$ على Γ يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ وأن التكامل للتابع $f_1(z)$ على γ يسعى إلى الصفر عندما $r \to 0$ أما على القوسين γ_1 و γ'_1 فيكون لدينا التكامل للتابع $f_1(z)$ على هذين القوسين وعلى الترتيب التالي:

$z^{\alpha-1} = 1 + O_1(r_1)$ على قوس الدائرة العلوي γ_1.

$z^{\alpha-1} = e^{2\pi\alpha i} + O_2(r_1$ على قوس الدائرة السفلي أي على γ'_1.

ويكون $1 - z = r_1 . e^{i\theta}$ و $dz = - i . r_1 . e^{i\theta}$ وبحيث θ تتحول من الصفر إلى π- على قوس الدائرة العلوي وتتحول من π- إلى 2π- على قوس الدائرة السفلي.

ومن ثمَّ يكون لدينا:

$$\int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\gamma_1'} f_1(z)dz = \pi i(1 + e^{2\alpha\pi i}) + O(r_1)$$

وبالعودة إلى (*) نجد أن:

$$\int_{\infty}^{1} f_1(\tilde{x})dx + \lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1'} f_1(z)dz + \int_{1}^{0} f_1(\tilde{x})dx + \int_{0}^{1} f_1(x)dx + \lim_{r_1\to 0}\int_{\gamma_1} f_1(z)dz$$

$$+\int_{1}^{\infty} f_1(x)dx = 0 \qquad \ldots \qquad (**)$$

ولكن:

$$\lim_{r_1\to 0}\left[\int_{\gamma_1'} f_1(z)dz + \int_{\gamma_1} f_1(z)dz\right] = \lim_{r_1\to 0}\left[\pi i(1+e^{2\alpha\pi i}) + O(r_1)\right] = \pi i(1+e^{2\alpha\pi i})$$

وواضح أن: $O(r_1) \to 0$ عندما $r \to 0$

ومن ثمَّ وبالعودة إلى (**) نجد أن:

$$\int_{\infty}^{1} f_1(\tilde{x})dx + \int_{1}^{0} f_1(\tilde{x})dx + \int_{0}^{1} f_1(x)dx + \int_{1}^{\infty} f_1(x)dx + \pi i\left(1+e^{2\alpha\pi i}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{1}\left[f_1(x) - f_1(\tilde{x})\right]dx + \int_{1}^{\infty}\left[f_1(x) - f_1(\tilde{x})\right]dx + \pi i\left(1+e^{2\alpha\pi i}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\infty}\left[f_1(x) - f_1(\tilde{x})\right]dx + \pi i\left(1+e^{2\alpha\pi i}\right) = 0$$

ولكن وجدنا: $f_1(\tilde{x}) = e^{2\alpha\pi i}\cdot f_1(x)$

بالتعويض نجد أن:

$$\int_{0}^{\infty}\left[f_1(x) - e^{2\pi\alpha i}\cdot f_1(x)\right]dx + \pi i\left(1+e^{2\alpha\pi i}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1-e^{2\pi\alpha i}\right)\cdot I = -\pi i\left(1+e^{2\alpha\pi i}\right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{-\pi i\left(1+e^{2\alpha\pi i}\right)}{\left(1-e^{2\pi\alpha i}\right)} = \pi \operatorname{ctg}(\alpha\pi)$$

ومنه إن قيمة التكامل الشاذ هو: $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = \pi \cdot ctg(\alpha\pi)$

التمرين السابع:

ليكن المطلوب حساب التكامل:

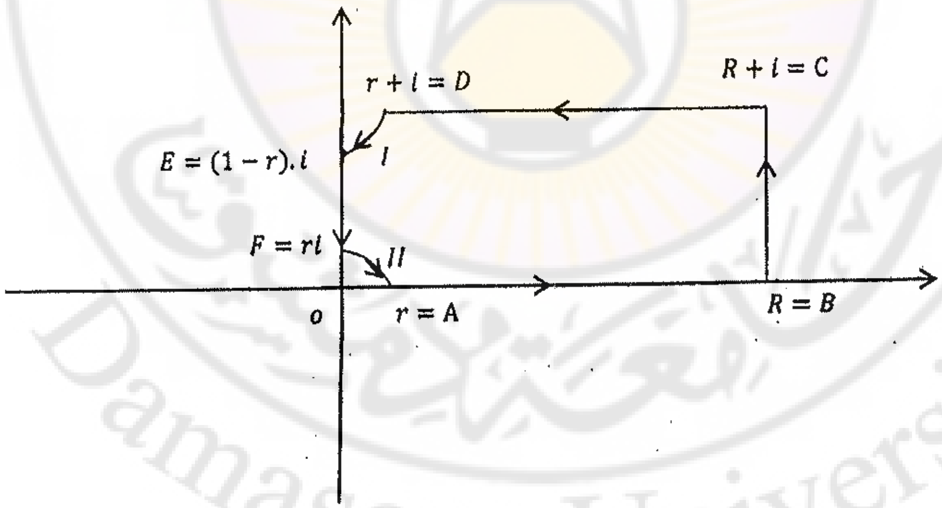
$$\int_0^\infty e^{-\pi x} \cdot \frac{\sin(ax)}{sh(\pi x)} dx \quad ; \quad (a > 0)$$

الحل:

لنأخذ التابع $f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$ بحيث إن التابع المستكمل يمثل من التابع f(z) ضعف قسمه التخيلي على المحور ox أي إن التابع المستكمل يمثل من التابع f(z) ضعف القسم التخيلي للتابع f(z) وذلك بعد تبديل z بـ x في f(z) أي:

$$e^{-\pi x} \cdot \frac{\sin(ax)}{sh(\pi x)} = 2\,\mathrm{Img}\left[\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1}\right] \quad \dots \quad (1)$$

ولنأخذ طريق المكاملة C كما هو مبين بالشكل التالي: (الشكل (٢٧)).



الشكل (٢٧)

ونلاحظ أن التابع f(z) تحليلي في المنطقة المحدودة والمغلقة بالمنحني C السابق ومن ثمَّ بحسب مبرهنة كوشي نجد أن:

$$\int_C f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_C \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z}-1}dz = 0$$

هذه من جهة ومن جهة أخرى:

$$\int_C f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz + \int_{I} f(z)dz + \int_{EF} f(z)dz$$
$$+ \int_{II} f(z)dz = 0 \quad \ldots \quad (*)$$

بالنسبة للتكامل للتابع f(z) على القطعة AB يكون لدينا ما يلي:

$$\{r \le x \le R \;\;,\;\; y = 0 \Rightarrow dy = 0\} \Rightarrow dz = dx$$

$$\Rightarrow \int_{AB} f(z)dz = \int_r^R \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx \quad \ldots \quad (1)$$

بالنسبة للتكامل للتابع f(z) على القطعة BC يكون:

$$\{r \le y \le 1 \;\;,\;\; x = R \Rightarrow dx = 0\} \Rightarrow dz = idy$$

$$\Rightarrow \int_{BC} f(z)dz = \int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}\cdot idy \quad \ldots \quad (2)$$

بالنسبة للتكامل للتابع f(z) على القطعة CD يكون لدينا ما يلي:

$$\int_{CD} f(z)dz = \int_R^r \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)}-1}dx \quad \ldots \quad (3)$$

بالنسبة للتكامل للتابع f(z) على القطعة EF يكون:

$$\int_{EF} f(z)dz = \int_{1-r}^{r} \frac{e^{ia(iy)}}{e^{2\pi(iy)}-1}\cdot idy \quad \ldots \quad (4)$$

أما بالنسبة للتكامل للتابع $f(z)$ على قوس الدائرة I ومن أجل إيجاد هذه القيمة لنقوم بنشر التابع $f(z)$ في جوار $z = i$ بمتسلسلة تايلور فيكون:

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1} = \frac{e^{-a} + c_1(z-i) + c_2(z-i)^2 + \dots}{2\pi(z-i) + c_2'(z-i)^2 + \dots}$$

باقي عوامل النشر لا نستفيد منها وإنما الفائدة بالحد الأول من البسط والحد الأول من المقام وبقسمة البسط على المقام يكون لدينا ما يلي:

$$f(z) = \frac{e^{-a}}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-i} + P(z-i)$$

وحيث $P(z-i)$ هو تابع تحليلي في جوار $z = i$ والأكثر من ذلك وعلى قوس الدائرة I يكون لدينا ما يلي:

$$z - i = r \,.\, e^{i\theta} \Rightarrow dz = i \,.\, r \,.\, e^{i\theta}\, d\theta$$

ومن ثمَّ يكون:

$$\int_I f(z)dz = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{-a}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r.e^{i\theta}} + P(r.e^{i\theta})\right] i.r.e^{i\theta} d\theta =$$

$$i\frac{e^{-a}}{2\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^{-\frac{\pi}{2}} P(r.e^{i\theta}) i.r.e^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$\int_I f(z)dz = \frac{-i}{4}.e^{-a} + o_1(r) \;;\; o_1(r) = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} P(r.e^{i\theta}) i.r.e^{i\theta} d\theta \quad \dots (5)$$

وبنفس الطريقة يكون على قوس الدائرة II ما يلي:

$$\int_{II} f(z)dz = \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\theta + o_2(r) = \frac{-i}{4} + o_2(r) \quad \dots \quad (6)$$

بتعويض كل من (1) و (2) و (3) و (4) و (5) و (6) في (*) نجد أن:

$$\int_r^R \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx+\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.idy+\int_R^r \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)}-1}dx$$

$$-i.\frac{e^{-a}}{4}+o_1(r)+\int_{1-r}^{r} \frac{e^{ia(iy)}}{e^{2\pi(iy)}-1}dx-\frac{i}{4}+o_2(r)=0$$

وبجعل $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد أن:

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx+\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.idy+\int_\infty^0 \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)}-1}dx-i.\frac{e^{-a}}{4}$$

$$+\lim_{r\to0} o_1(r)+\int_1^0 \frac{e^{ia(iy)}}{e^{2\pi(iy)}-1}.idy-\frac{i}{4}+\lim_{r\to0} o_2(r)=0 \quad \dots \quad (**)$$

وبسهولة يمكن التأكد من أن:

$o_1(r) \to 0$ عندما $r \to 0$, $o_2(r) \to 0$ عندما $r \to 0$

بقي أن نقوم بتقدير التكامل التالي:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.idy$$

ولكن لدينا:

$\left|e^{2\pi(R+iy)}-1\right| \geq$ بحسب خواص الطويلة $\geq \left|e^{2\pi(R+iy)}\right|-1=e^{2\pi R}-1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\left|e^{2\pi(R+iy)}-1\right|} \leq \frac{1}{e^{2\pi R}-1}$$

ولدينا:

$$|e^{ia(R+iy)}|=e^{-ay}\leq 1$$

ومن ثمَّ:

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.idy\right| \leq \int_0^1\left|\frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.i\right|dy \leq \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi R}-1}dy=\frac{1}{e^{2\pi R}-1}$$

وعندما $R \to \infty$ نجد:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.idy\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^{2\pi R}-1}=0 \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1}.idy=0$$

وبالعودة إلى (**) نجد أن:

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx+\int_\infty^0 \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)}-1}dx-i.\frac{e^{-a}}{4}+\int_1^0 \frac{e^{ia(iy)}}{e^{2\pi(iy)}-1}.idy-\frac{i}{4}=0$$

$$\Rightarrow (1-e^{-a})\cdot\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}.dx=i.\int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi yi}-1}.dy+\frac{i}{4}\left(e^{-a}+1\right)$$

ولكن التابع المستكمل هو ضعف القسم التخيلي للتابع $f(x)=\dfrac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}$

على محور الـ ox أي إن: $e^{-\pi x}\cdot\dfrac{\sin(ax)}{sh(\pi x)}=2\,\mathrm{Img}\left[\dfrac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}\right]$

ولدينا: $\mathrm{Re}\left[\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi yi}-1}dy\right]=-\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ay}}{2}dy=\frac{1}{2a}\left[e^{-a}-1\right]$

ومن ثمَّ يكون لدينا ما يلي:

$$\left(1-e^{-a}\right)\cdot\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx=i.\int_0^1 \frac{e^{-a}}{e^{2\pi yi}-1}dy+\frac{i}{4}\left(e^{-a}+1\right)\Rightarrow$$

$$\left(1-e^{-a}\right)\cdot\int_0^\infty e^{-\pi x}\cdot\frac{\sin(ax)}{sh(\pi x)}dx=2\cdot\frac{1}{2a}\left[e^{-a}-1\right]+\frac{2}{4}\left(e^{-a}+1\right)\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\cdot\frac{\sin(ax)}{sh(\pi x)}dx=\frac{\frac{1}{a}\left[e^{-a}-1\right]+\frac{1}{2}\left(e^{-a}+1\right)}{\left(1-e^{-a}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-a}+1}{1-e^{-a}}-\frac{1}{a}$$

ومن ثمَّ نحصل على القيمة النهائية للتكامل:

$$\int_0^\infty e^{-\pi x} \cdot \frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh}(\pi x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-a}+1}{1-e^{-a}} - \frac{1}{a}$$

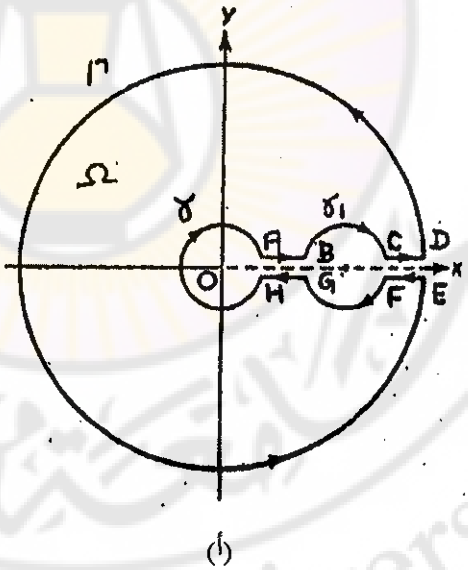
التمرين الثامن:

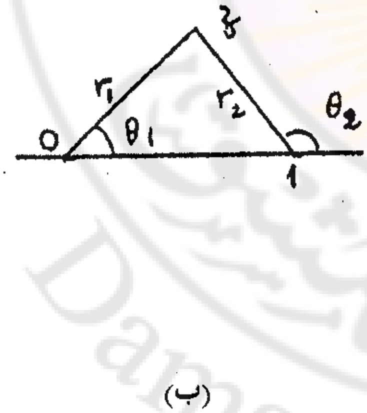
احسب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$$

الحل:

ننطلق من التابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$. إن لهذا التابع نقطتين حرجتين في الموضعين $z = 0$ و $z = 1$. يمكننا لذلك أن نختار طريق المكاملة كما في الشكل (٢٨). إن كل فرع من فروع $f(z)$ تحليلي في Ω وعلى محيطها. ولذلك إذا اخترنا أحد الفروع فإن:





الشكل (٢٨)

$$I=\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2-z^3}}=0$$

ومن جهة أخرى إن:

$$I=\int_{1+\varepsilon_1}^{R} f(z)dz+\int_{\Gamma} f(z)dz+\int_{R}^{1+\varepsilon_1} f(z)dz+\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{1-\varepsilon_1}^{\varepsilon} f(z)dz$$

$$+\int_{\gamma} f(z)dz+\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon_1} f(z)dz$$

لاختيار الفرع نضع:

$$z=r_1e^{i(\theta_1+2k_1\pi)} \quad ; \quad z-1=r_2e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$$

فيكون:

$$z^2=r_1^2e^{i(\theta_1+4k_1\pi)} \quad ; \quad 1-z=r_2e^{i(\theta_2+\pi+2k_2\pi)}$$

$$\sqrt[3]{z^2-z^3}=\sqrt[3]{r_1^2r_2}\,e^{i\left[\frac{2\theta_1+\theta_2}{3}\frac{\pi}{3}+\frac{4k_1+2k_2}{3}\pi\right]}$$

لنضع $\theta_1 = \theta_2 = 0$ عندما تكون z على C ولنأخذ التعيين الذي من أجله $k_1 = k_2 = 0$ فيكون على CD:

$$\sqrt[3]{z^2-z^3}=\sqrt[3]{r_1^2r_2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt[3]{x^3-x^2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

وعلى EF: $\theta_1 = \theta_2 = 2\pi$ وبالتالي:

$$\sqrt[3]{z^2-z^3}=\sqrt[3]{x^3-x^2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

وعلى GH: $\theta_1 = 2\pi \;,\; \theta_2 = \pi$ وبالتالي:

$$\sqrt[3]{z^2-z^3}=\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

وعلى AB: $\theta_1 = 0 \;,\; \theta_2 = \pi$ وبالتالي:

$$\sqrt[3]{z^2 - z^3} = \sqrt[3]{x^2 - x^3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

وحيث إن $zf(z) \to 0$ عندما $\varepsilon \to 0$ فإن التكامل على γ يسعى إلى الصفر عندما $\varepsilon \to 0$ (نظرية جوردان).

وحيث إن $(z-1)\,f(z) \to 0$ عندما $\varepsilon_1 \to 0$ فإن التكامل على γ_1 يسعى إلى الصفر عندما $\varepsilon_1 \to 0$ (نظرية جوردان).

ولكن $z\ f(z)$ لا يسعى إلى الصفر عندما $z \to \infty$ ولذلك لا نستطيع تطبيق نظرية جوردان هنا.

ولحساب التكامل على Γ أي لحساب التكامل:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2 - z^3}}$$

ننشر $f(z)$ بجوار اللانهاية. لنضع من أجل ذلك $z = \frac{1}{t}$ فنجد:

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{\sqrt[3]{t-1}}$$

ثم ننشر $\varphi\,(t)$ بجوار الصفر فنجد:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (-1)^{-\frac{1}{3}} t(1-t)^{-\frac{1}{3}} \\
&= (-1)^{-\frac{1}{3}} t(1 + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}t^2 + ..) \\
&= (-1)^{-\frac{1}{3}} (t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t^3 + ..)
\end{aligned}$$

ومنه:

$$f(z) = (-1)^{-\frac{1}{3}} (\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^2} + ..)$$

ومن الواضح أن هذا النشر متعدد القيم لأن $(-1)^{-\frac{1}{3}}$ متعدد القيم. ولكن علينا أن نعين القيمة المتفقة مع الفرع الذي اخترناه. لننظر من أجل ذلك في النقطة D حيث يكون هناك:

$$\sqrt[3]{z^2 - z^3} = \sqrt[3]{R^2(R-1)}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه تكون قيمة $f(z)$ هناك:

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt[3]{R^2(R-1)}}$$

وبما أن $z = R$ فإننا نجد إذا ما عوضنا بالمتسلسلة الأخيرة:

$$\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt[3]{R^2(R-1)}} = (-1)^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{3R^2} + \ldots\right]$$

ومنه نجد أن $(-1)^{-\frac{1}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ إذن:

$$f(z) = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^2} + ..\right)$$

إن هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام من أجل $|z| > 1$ ولذلك فإن:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = e^{-i\frac{\pi}{3}}(2\pi i) = 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

وهكذا نجد أخيراً إذا جعلنا $R \to \infty$ و $\varepsilon_1 \to 0$ و $\varepsilon_2 \to 0$:

$$0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - x^2}} + 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\int_{\infty}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - x^2}} + \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$$

$$+e^{-2\frac{i\pi}{3}}\int_{\infty}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-x^2}}$$

ومنه:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}=\frac{2\pi e^{-\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{-2\frac{i\pi}{3}}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

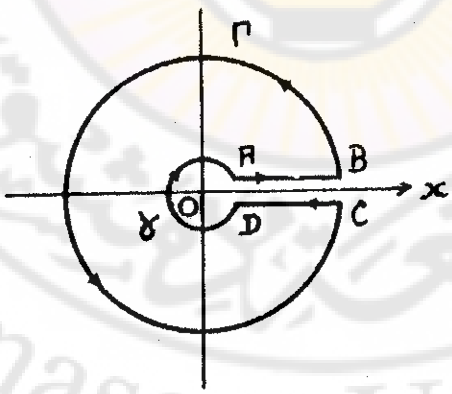
التمرين التاسع:

احسب التكامل:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$$

الحل:

لننطلق من التابع $\frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}$. إن لهذا التابع نقطة حرجة في الموضع $z = 0$، ولذلك يمكن اختيار الطريق C كما في الشكل (٢٩) حيث نصف قطر Γ يساوي R ونصف قطر γ يساوي ε.



الشكل (٢٩)

لاختيار أحد فروع التابع نضع: $z = r\, e^{i(\theta+2k\pi)}$.

ومنه: $\lg z = \lg r + i\,\theta + 2k\pi i$

لنفرض أن $\theta = 0$ إذا كانت z على AB ولنأخذ ذلك الفرع الذي يوافق $k = 0$. فيكون $\lg z = \lg x$ على AB. أما على CD فتكون $\theta = 2\pi$ ومن ثمَّ يكون هناك $\lg z = \lg x + 2\pi i$.

لنلاحظ أن للتابع $f(z)$ قطبين من المرتبة الثانية في الموضعين $z = \pm i$.

وفي الموضع $z = i$ يكون $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\lg z = i\frac{\pi}{2}$

وفي الموضع $z = -i$ يكون $r = 1$ و $\theta = 3\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\lg z = i3\frac{\pi}{2}$

ويكون الراسب في الموضع الأول:

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{(z-i)^2\lg^2 z}{\left(z^2+1\right)^2} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{\lg^2 z}{(z+i)^2} = \frac{-4+\pi i}{16}\pi$$

ويكون الراسب في الموضع الثاني:

$$\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{\lg^2 z}{(z-i)^2} = \frac{12-9\pi i}{16}\pi$$

وبتطبيق نظرية الرواسب نجد:

$$I = \int_C \frac{\lg z}{(1+z)^2}dz = 2\pi i\frac{-4+\pi i}{16}\pi + \frac{12-9\pi i}{16}\pi = \pi^2(\pi+i)$$

ومن جهة أخرى:

$$I = \int_\varepsilon^R \frac{\lg^2 x}{(1+x^2)^2}dx + \int_\Gamma f(z)dz + \int_R^\varepsilon \frac{(\lg x + 2\pi i)^2}{(1+x^2)^2}dx + \int_\gamma f(z)dz$$

ولكن $z\,f(z)$ يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ وعندما $\varepsilon \to 0$ ولذلك فإن التكامل على Γ يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ والتكامل على γ يسعى إلى الصفر عندما $\varepsilon \to 0$ وبالتالي فإن:

$$\pi^2(\pi+i) = \int_0^\infty \frac{\lg^2 x}{(1+x^2)}dx - \int_0^\infty \frac{(\lg x + 2\pi i)^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\lg x}{(1+x^2)^2}dx$$

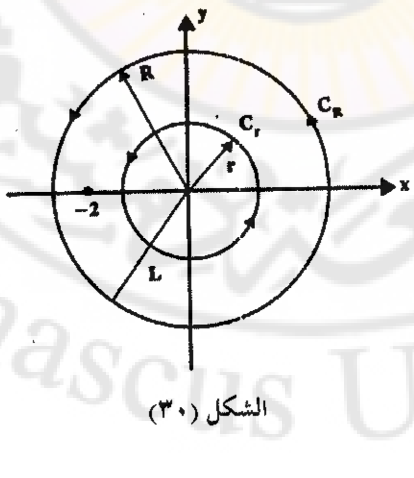
وأخيراً نجد: $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \int_0^\infty \frac{\lg x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$$

وهو المطلوب.

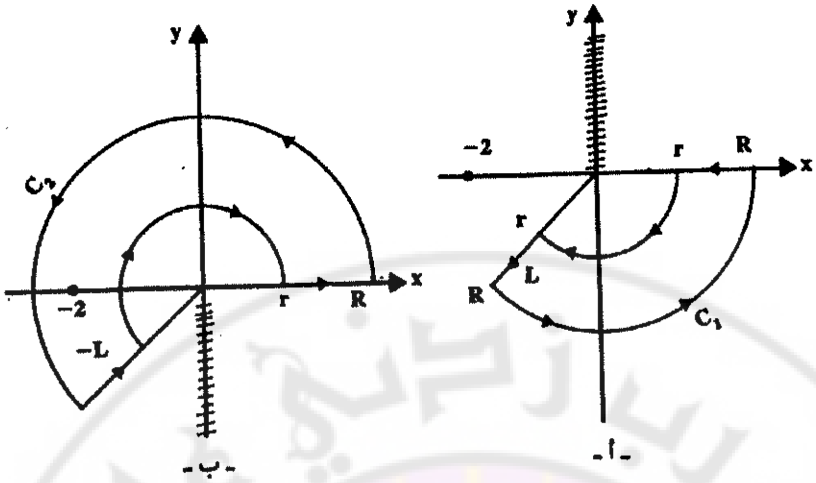
التمرين العاشر:

احسب قيمة التكامل: $$I = \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+2}dx$$

الحل: إذا كانت C_r و C_R دائرتين بحيث إن $r < 2 < R$ فإنه يمكن أن نقسم الكانتور المكون منهما إلى قسمين باختيار وصلة مناسبة نتخلص بها من فصل الفرع المناسب كما يبين الشكلان (٣٠) و (٣١).



الشكل (٣٠)



الشكل (٣١)

من الواضح أن الدالة g تحليلية على مجال يحتوي الكانتور C_1 ومن ثمَّ فإن:

$$\int_{C_1} g(z)dz = 0 \qquad (1)$$

بينما يوجد قطب بسيط للدالة f(z) عند 2 – واقعاً في المنطقة الداخلية للكانتور C_2 وعليه فإن نظرية الرواسب تؤكد أن:

$$\int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,-2) = I \qquad (2)$$

كذلك فإن كلا الفرعين f و g تحليلي على القطعة المستقيمة L، L- ومن ثمَّ فإن:

$$\int_{C_1} g(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_r} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz + \int_r^R f(z)dz - \int_r^R g(z)dz$$

وبجمع العلاقتين (1) و (2) والتعويض في المساواة السابقة والأخذ بعين الاعتبار العلاقة بين الفرعين f و g ينتج أن:

$$I = \int_{C_R} f(z)dz - \int_{C_r} f(z)dz - \int_r^R \frac{x^{-a}}{x+2}dx + \int_r^R \frac{e^{-2\pi ai}x^{-a}}{x+2}dx$$

$$= \int_{C_R} f(z)dz - \int_{C_r} f(z)dz + (e^{-2\pi ai} - 1)\int_r^R \frac{x^{-a}}{x+2}dx$$

وبأخذ النهاية عندما تؤول r إلى صفر وعندما تؤول R إلى ∞ كل على حدة ينتج أن:

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{-a}}{z+2}dz - \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{z^{-a}}{z+2}dz + (e^{-2\pi ai}-1)\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_r^R \frac{x^{-a}}{x+2}dx$$

وبالتحقق نجد أن:

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^{-a}}{z+2}dz\right| \le \frac{R^{-a}\,2\pi R}{R-2} < \frac{2\pi R}{(R-2)R^a}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{-a}}{z+2}dz = 0$$

وبالمثل فإن:

$$\left|\int_{C_r}\frac{z^{-a}}{z+2}dz\right| \le \frac{r^{-a}\,2\pi r}{r-2} = \frac{2\pi}{2-r}r^{1-a}$$

وبما أن $1 - a > 0$ فإن:

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{z^{-a}}{z+2}dz = 0$$

وهذا يؤكد أن:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+2}dx = \frac{I}{e^{-2\pi ai}-1} = \frac{2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-2)}{e^{-2\pi ai}-1}$$

وبما أن 2- قطب بسيط للدالة فإن:

$$\mathrm{Res}(f,-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)f(z)$$

$$= \lim_{z\to -2} z^{-a} = (-2)^{-a}$$
$$= e^{-a\log(-2)}$$
$$= e^{-a\ln 2}.e^{-a\pi i}$$
$$= 2^{-a}.e^{-a\pi i}$$

وبالتعويض نستنتج أن:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+2}dx = \frac{2\pi i 2^{-a}e^{-a\pi i}}{e^{-2\pi ai}-1} = \frac{-\pi 2^{-a}}{\sin \pi a}$$

التمرين الحادي عشر:

أوجد عدد أصفار كثير الحدود:

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$$

١ . الواقعة في نصف المستوي الأيمن. ٢ . الواقعة في الربع الأول من المستوي العقدي.

الحل:

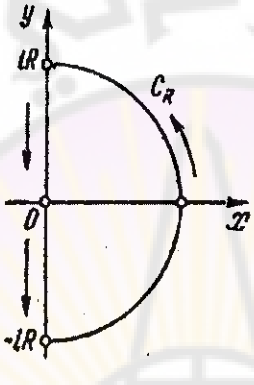
بما أنه لـ $P(z)$ لا يوجد أقطاب فإن $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \mathrm{Arg}P(z)$ يساوي لعدد أصفار $P(z)$ الواقعة داخل المنحني C. لنأخذ بمنزلة المنحني C نأخذ حدود نصف الدائرة التي مركزها في النقطة $z = 0$ وقطرها على المحور التخيلي، وأما نصف قطرها R فكبير بقدر كافٍ بحيث تكون أصفار $P(z)$ الواقعة في نصف المستوي الأيمن واقعة داخل نصف الدائرة الشكل (٣٢). لنطبق مبدأ الأرغومينت بالنسبة للمنحني C، ومن ثم ننتقل إلى النهاية عندما $R \to \infty$ بما أن:

$$P(z) = z^4\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4}\right)$$

فإن تغير عمدة المضروب الثاني في الطرف الأيمن، عندما ترسم النقطة z نصف الدائرة C_R يكون قريباً جداً من الصفر ولا سيما عندما R يكون كبيراً بقدر كافٍ. وهكذا نجد:

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z^4 = 4\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z = 4\pi$$

$$\infty \leftarrow R \text{ عندما } 4\pi \leftarrow \left[\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} P(z)\right]$$



الشكل (٣٢)

لنفرض الآن أن النقطة z ترسم قطعة المحور التخيلي من النقطة $z = iR$ إلى النقطة $z = -iR$ ولنضع $z = it$ فنجد:

$$P(it) = u + iv = t^4 - 3t^2 + 2 + i(-2t^3 - t)$$

ومنه يكون:

$$u = t^4 - 3t^2 - 2 \;,\; v = -2t^3 + t$$

وكي نتمثل المنحني الذي ترسمه النقطة $w = P(z)$ نحسب نقاط تقاطع ذلك المنحني مع المحورين الإحداثيين في المستوي w. وبغية ذلك نحل المعادلتين:

$$t^4 - 3t^2 + 2 = 0 \quad , \quad -2t^3 + t = 0$$

إن جذور المعادلة الأولى هي: $t = \pm\sqrt{2}$ و $t = \pm 1$ وأما جذور المعادلة الثانية فهي $t = 0$، $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (بما أنه لا توجد جذور مشتركة للمعادلتين، فإن P(z) لا

ينعدم في نقاط المحور التخيلي وهذا ما يمكننا من تطبيق مبدأ الأرغومينت). لنرتب الجذور التي وجدناها تناقصياً (أي موافقاً لرسم المنحني):

$$\sqrt{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -1\ ,\ -\sqrt{2}$$

ومن ثم نجد القيم الموافقة لـ v, u فنجد:

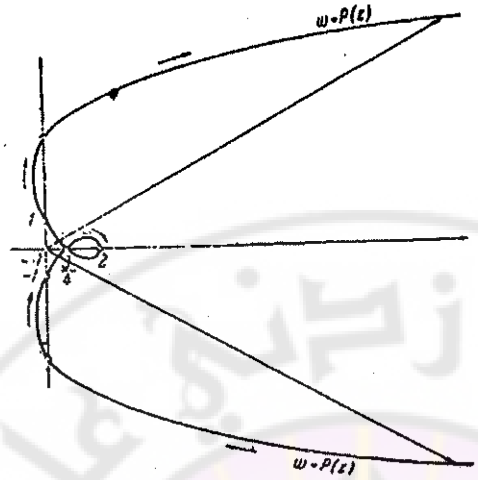
$$u = 0\ ,\ v = -3/\sqrt{2}\ \ ;\ t = \sqrt{2}$$
$$u = 0\ ,\ v = -1\ \ ;\ t = 1$$
$$u = 3/4\ v = 0\ \ ;\ t = 1/\sqrt{2}$$
$$u = 2\ ,\ v = 0\ \ ;\ t = 0$$
$$u = 3/4\ ,\ v = 0\ \ ;\ t = -1/\sqrt{2}$$
$$u = 0\ ,\ v = 1\ \ ;\ t = -1$$
$$u = 0\ ,\ v = 3\sqrt{2}\ \ ;\ t = -\sqrt{2}$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنه عندما $t = R \to \infty$ يكون $u \to +\infty$ و $v \to -\infty$ و $(v/u) \to 0$ وأنه عندما $t = (-R) \to -\infty$ فإن $u \to +\infty$، $v \to +\infty$ و $(v/u) \to 0$. فإنه يمكننا تأكيد أن شكل المنحني الذي ترسمه النقطة $w = P(Z)$ عندما ترسم النقطة z المحور التخيلي من الأعلى إلى الأسفل يكون كما في الشكل (٣٣) وأن تغير عمدة $P(z)$ يساوي الصفر.

ومن ثمَّ يكون لدينا من أجل R كبيراً بقدر كافٍ:

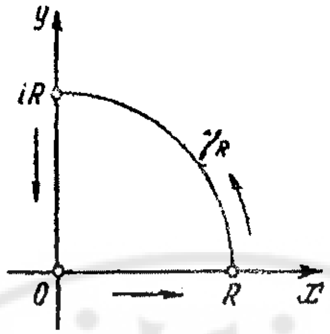
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} P(z) = \frac{1}{2\pi}\cdot 4\pi = 2$$

أي إن لـ $P(z)$ صفرين في نصف المستوي الأيمن.



الشكل (٣٣)

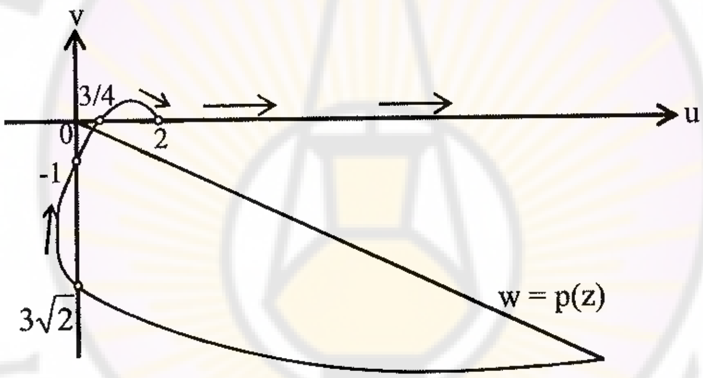
٢ . لتحديد عدد أصفار كثير الحدود $P(z)$ الواقعة في الربع الأول نأخذ المنحني المغلق γ الشكل (٣٤)، وليكن γ_R قوس الدائرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها R. وبالمثل، كما في الحالة السابقة، يكون تغير عمدة $P(z)$ على القوس γ_R ومن أجل R كبيراً بقدرٍ كافٍ مساوياً لـ 2π. وعندما $R \to \infty$ فإن القطعتين المستقيمتين في المنحني γ_R تؤولان إلى النصفين الموجبين من المحور التخيلي والمحور الحقيقي. وعندما ترسم النقطة z القسم الموجب من المحور التخيلي، من الأعلى إلى الأسفل، فإن النقطة $w = P(z)$ ترسم نصف المنحني الممثل في الشكل (٣٣) أعلاه والواقع في نصف المستوي السفلي. وعندما ترسم النقطة z القسم الموجب من المحور الحقيقي. أي عندما $z = x > 0$، $x \to -\infty$ فإن $w = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2 > 0$ و $w \to +\infty$ ويكون للمنحني الذي ترسمه النقطة $w = P(z)$ عندما ترسم النقطة z القسم الموجب من المحور التخيلي من الأعلى إلى الأسفل ومن ثم القسم الموجب من المحور الحقيقي الشكل المبين في الشكل (٣٥) ويكون تغير عمدة $P(z)$ على هذا المنحني مساوياً للصفر، وهكذا ومن أجل R كبيراً بقدرٍ كافٍ يكون:



الشكل (٣٤)

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}P(z) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$$

ومن ثمَّ فإنه لـ $P(z)$ صفراً واحداً في الربع الأول.



الشكل (٣٥)

٢ . ١٥ . تمارين غير محلولة:

١ . أوجد عدد جذور كل معادلة من المعادلات الآتية في الساحة D المبينة بجانب كل منها:

1) $z^8 - 7z^5 - 3z^4 + 1 = 0 \quad ; \quad D: \{|z| < 1\}$

2) $z^4 - 2z^2 - 1 = 0 \quad ; \quad D: \{1 < |z| < 2\}$

3) $e^z - 2z - 1 = 0 \quad ; \quad D: \{|z| < 1\}$

4) $0.9e^{-z} + 1 = 2z \quad ; \quad D: \{|z| < 1 \, ; \, x > 0\}$

5) $1 + 2z - z^5 = 0 \quad ; \quad D: \{|z| < 1 \, ; \, x > 0\}$

٢ . أوجد عدد جذور كثير الحدود:

$$P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

الواقعة في نصف المستوي الأيمن.

٣ . أوجد عدد جذور المعادلة $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$ الواقعة في نصف المستوي الأيمن ومن ثم في الربع الأول.

٤ . ما عدد جذور المعادلة؟

$$2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$$

الواقعة في كل ربع من المستوي.

٥ . أوجد عدد حلول كل معادلة من المعادلات الآتية داخل دائرة الوحدة:

1) $z^4 - 5z + 1 = 0$ الجواب : 1

2) $z^6 - 6z + 10 = 0$ الجواب: صفر

3) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ الجواب : 5

4) $z = \varphi(z) \; ; \; (|z| \leq 1$ عندما $|\varphi(z)| < 1$ حيث$)$ (الجواب = 1)

٦ . كم عدد حلول كل من المعادلتين التاليتين من كل ربع من أرباع المستوي z.

$1)\ z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ ج: حل واحد في كل ربع

$2)\ 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$ ج: حل واحد في كل ربع

٧ . إذا كان $\lambda > 1$ فبين أن للمعادلة $\lambda - z - e^{-z} = 0$ حلاً واحداً في نصف المستوي الأيمن ثم بين أنه ينبغي أن يكون هذا الحل حقيقياً، وماذا يحدث لهذا الحل عندما $\lambda \to 1$.

٨ . إذا كان f تحليلياً في القرص المغلق الذي مركزه الصفر ونصف قطره الواحد ومحققاً للشرط $|f(z)| < 1$ عندما $|z| = 1$. أوجد عدد حلول المعادلة $f(z) = z^n$ وذلك بفرض أن n عدد صحيح أكبر أو يساوي الواحد.

٩ . أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$1)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

$$2)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} \quad ; \quad a > |b|$$

$$3)\ I = \int_C \frac{z-3}{z^2-4} dz \quad ; \quad C: x^2 + 4y^2 = 16$$

$$4)\ I = \int_C \frac{e^{2iz} - 5z}{z+2i} dz \quad ; \quad C: |z+1| = 3$$

$$5)\ I = \int_C \frac{e^z}{z^3 - 2z^2 + z} dz \quad ; \quad C: |z| = 2$$

$$6)\ I = \int_C \frac{e^z}{z^2 + 4} dz \quad ; \quad C: |z| = 3$$

$$7)\ I = \int_C \frac{e^z}{\cosh z} dz \quad ; \quad C: |z| = 4$$

8) $I = \int\limits_C \frac{1}{z^2 + z + 1} dz \quad ; \quad C: |z| = 4$

9) $I = \int\limits_C \frac{1}{z(z^2 + 6z + 4)} dz \quad ; \quad C: |z| = 4$

10) $I = \int\limits_C \frac{z^2}{(z^2 + 3z + 2)^2} dz \quad ; \quad C: |z| = 4$

11) $I = \int\limits_C \frac{z+1}{z^2(z+2)} dz \quad ; \quad C: |z| = 4$

12) $I = \int\limits_C \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz \quad ; \quad \pm 3 \,, \pm 3i$ هي مربع رؤوسه C

13) $I = \int\limits_C e^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{z} dz \quad ; \quad C: |z| = 5$

14) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

15) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta + 3}$

16) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos\theta + 3\sin\theta + 7}$

17) $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^4} \quad ; \quad$ 17`) $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} \quad ; \quad a > 1$

18) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta} d\theta$

19) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} d\theta \quad ; \quad -1 < p < +1$

20) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26 - 10\cos 2\theta} d\theta$

21) $I = \int\limits_C \frac{sh7z}{(z-3)^5(z^2+25)}dz \quad ; \quad C: |z| = 2$

22) $I = \int\limits_C \frac{ch\pi z}{z^2+2}dz \quad ; \quad C: |z| = 2$

23) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta}$

24) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$

25) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-a\cos\theta+a^2}$

26) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin\theta}$

27) $I = \int\limits_C \frac{z+1}{z+i}dz \quad ; \quad C: |z| = 2$

28) $I = \int\limits_C \frac{\sin z}{z^3-z^2}dz \quad ; \quad C: |z| = 2$

29) $I = \int\limits_C \frac{1}{4z^2+9}dz \quad ; \quad C: |z| = 2$

30) $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad ; \quad a^2 < 1$

31) $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3\varphi d\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2} \quad ; \quad |p| < 1$

32) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} \quad ; \quad a > 0$

33) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$

34) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

35) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 25)} dx$

36) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2}$

37) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x}{1 + x^3} dx$

38) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$

39) $I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 2}$

40) $I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^4 + a^2} \quad ; \; a > 0$

41) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

42) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$

43) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}$

44) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$

45) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

46) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2-2x-2)^2}$

47) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)^2}$

48) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

49) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$

50) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}$

51) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

52) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$

53) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4)(x^2+1)}$

54) $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$

55) $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

56) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\frac{-1}{3}}}{1-x}dx = \frac{-\pi}{\sqrt{3}}$

57) $I=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^2+4\right)}=\frac{-\pi}{2\sqrt{5}}$

58) $I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}dx$

59) $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx=\pi\ln(2)$

60) $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2-b}{x^2+b}\frac{\sin ax}{x}dx \quad ; \quad a, b \in R$

61) $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx \quad ; \quad a, b \in R$

62) $I=\int_{C}\frac{e^{2iz}-1}{z^2}dz$

63) $I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

64) $I=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}(x+1)} \quad ; \quad 0<\alpha<1$

65) $I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\alpha}dx}{1+x^2} \quad ; -1<\alpha<+1$

66) $I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\alpha}dx}{(1+x^2)^2} \quad ; \ -1<\alpha<+3$

67) $I=\int_{0}^{1}\frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^3}dx \quad ; \ -1<\alpha<2 \qquad I=\frac{\pi\alpha(1-\alpha)}{8\sin\pi\alpha}2^{\alpha}$

68) $I=\int_{0}^{1}\frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x^2}dx \ ; -1<\alpha<2 \ ; \ I=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left[2^{\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha\pi}{4}-1\right]$

69) $I=\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^2}dx \quad ; \quad -1<\alpha<2$

70) $I=\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{1+x^2}dx \ ; -1<\alpha<2$

$$I=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left[\sin\frac{\alpha\pi}{2}+\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right]$$

71) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^3\sqrt{x^2(1-x)}}$

72) $I=\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx \quad ; \ 0<\alpha<1$

73) $I=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1-e^{x}dx}dx \quad ; \ 0<\alpha<1$

74) $I=\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(x+1)^2}dx \quad ; \ -1<\alpha<+1 \ ; \ I=\frac{\pi\cdot\alpha}{\sin\pi\alpha}$

75) $I=\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x^2+1)^2}dx \quad ; \ -1<\alpha<3 \ ; \ I=\frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$

76) $I=\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(a+x)^2}dx \ ; -1<a<2 \ ; I=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left[\frac{1+a-\alpha}{a}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\alpha-1}-1\right]$

77) $I=\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{shx}dx \ ; \ I=\frac{\pi}{2}+th\frac{\pi a}{2}$

وحيث: $a\in R$

توجيه: استعن بتكامل $\frac{e^{iaz}}{shz}$ على محيط C مكون من مستطيل:

$[-R, R, R+2\pi i \,, -R+2\pi i \,, -R]$

بعد أن تحذف من محيطه النقطتين 0 و $2\pi i$ بنصفي دائرتين نصف قطر كل منهما r، وتجعل $R \to \infty$، $r \to 0$.

78) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + a^6}$; $I = \frac{2\pi}{3a^5}$; $a > 0$

79) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx$; $I = \frac{\pi}{3}$

80) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$; $I = \frac{3\pi}{8}$

81) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \pi x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} dx$; $I = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{4}$

82) $I = \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$; $I = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

بينما $0 < a < 1$.

83) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx \quad (t \in R)$

84) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 5x + 6} dx$

85) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x-1)(x^2 + 4)}$

86) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^3} dx$; $a \geq 0$

87) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$

88) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

89) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x+1)} dx$

90) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^3 + 8} dx$

91) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$

92) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

93) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$; $b > 0, a > 0$ لكل

94) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$

95) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx$

96) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 16} dx$

97) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx$

98) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 - 2)^2 + 4} dx$

99) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx$

100) $I = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

101) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 16)^2} dx$

102) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{ab(a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$

103) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx$

104) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-2)} dx$

105) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2xi}}{x - 2} dx$

106) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 4x + 3} dx$

107) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 4} dx$

108) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$

109) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$

110) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 9} dx$, $a > 0$

111) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos ax}{x^2 + 2x + 2} dx$, $a > 0$

112) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 5} dx$

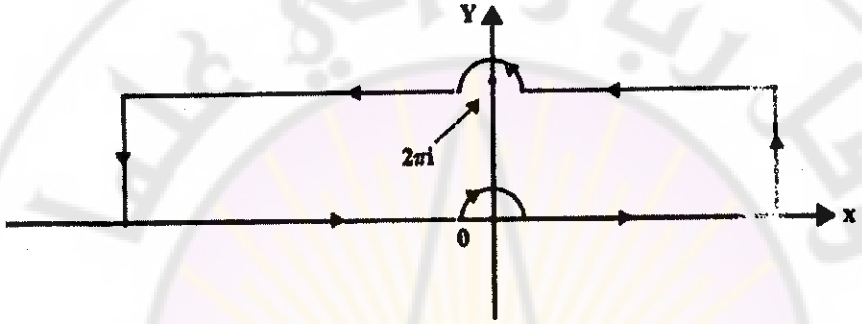
113) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x + a)^2 + b^2} dx$, $b > 0$

$$114)\ I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2-a^2}dx=-\frac{\pi}{a}\sin a$$

$$115)\ I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+4)}dx$$

$$116)\ I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{e^x-1}dx\ \ ;\ \ 0<a<1$$

اقتراح: افرض ان المسار C كما في الشكل الآتي:



$$117)\ I=\int_0^{\infty}\cos x^2dx=\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

وذلك بفرض أن: $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

وإيجاد تكامل الدالة $e^{z^2 i}$ على المسار المكوّن من حدود القطاع:

$$0\le r\le R,\ 0\le\theta\le\pi/4$$

ثم خذ النهاية عندما R تزداد بدون توقف.

١٠ . استناداً إلى مبرهنة الرواسب أوجد مجموع المتسلسلات العقدية الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth\pi a-\frac{1}{2a^2}\ \ ;\ \ a>0$$

$$2)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^4+4a^4}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n\pi}{n^7}$

5) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$; حيث: $a \in R$ ويختلف عن ... $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

7) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}$

8) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \cdot a}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin \pi a} - \frac{1}{a}$

*　　　　*　　　　*

الفصل الثالث

التطبيقات (التحويلات) المحافظة

الدوال المطابقة (المشاكلة)

Conformal Mappings

تمهيد:

نتعرض في هذا الفصل لفكرتي الاستمرار التحليلي والدالة المطابقة. أما فكرة الاستمرار التحليلي فسنعرفها بأسلوب بسيط في البند الأول، أما البند الثاني فسيعرض تعريف الدالة المطابقة وبعض الخصائص العامة لها وكذلك بعض نتائجها.

إن أهمية الدوال المطابقة تكمن في وجود تطبيقات هندسية وفيزيائية كثيرة لها وسنتعرض لها في البند ٥. أما البند الثالث فقد خصص لأمثلة هامة ولا سيما للدالة المطابقة مثل الدالة مزدوجة الخطية. أما تحويل شوارتز كريستوفل فقد تم عرضه في البند ٤.

٣ . ١ . الاستمرار التحليلي (Analytic Continuation):

قبل أن نعرف فكرة الاستمرار التحليلي بشكل مجرد يجدر بنا أن نقدّم لها بمثال ليسهل فهم هذه الفكرة. إذا فرضنا أن لدينا الدالة:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

فإنه يمكن أن نتبين أن نصف قطر التقارب لهذه الدالة (متسلسلة القوى) هو 1 وأن مجال تقاربها هو القرص المفتوح $|z|<1$ وعلى هذا المجال فإن هذه الدالة عبارة عن المتسلسلة الهندسية:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z} \quad , \quad |z|<1 \qquad (1)$$

وإذا بحثنا في الدالة $g(z)$ حيث:

$$g(z) = \frac{1}{1+z} \qquad (2)$$

نجد أنها تحليلية لجميع قيم $z \neq -1$ لأنها غير معرفة عند $z = -1$ وبالمقارنة بين الدالتين (1)، (2) نجد أنهما تتوافقان على المجال المفتوح $|z| < 1$ وتختلفان خارجه في مثل هذه الحالة تسمى الدالة $g(z)$ استمراراً تحليلياً للدالة f عند أي نقطة $z \neq -1$ (أي على كل المستوي عدا $z = -1$) على أي مسار يصل بين أي نقطتين إحداهما داخل المجال $|z| < 1$ والأخرى خارجه.

ولتبسيط الفكرة أكثر نعرفها على مرحلتين الأولى تسمى الاستمرار التحليلي البسيط والأخرى الاستمرار التحليلي على مسار C. الفكرة الأولى في التعريف التالي:

تعريف (١):

لنفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D وأن الدالة g تحليلية على المجال S فإن الدالة g تسمى استمراراً تحليلياً بسيطاً للدالة f إلى المجال S إذا تحقق الشرطان:

أ. $S \cap D \neq \phi$.

ب. $f(z) = g(z)$ لكل z في $S \cap D$.

مبرهنة (١):

إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D بحيث إن $f(z) = 0$ لكل z في جوار (مفتوح) في المنطقة الداخلية للمجال D فإن $f(z) = 0$ لكل z في D.

البرهان:

نفرض أن z_0 نقطة في الجوار (المفتوح) N والواقع في المنطقة الداخلية للمجال D فإن $f(z_0) = 0$ وبما أن f تحليلية على D فإنه بحسب مبرهنة سابقة نؤكد أنه إما أن

تكون $f(z) = 0$ لكل z في D وإمّا أن z_0 صفر معزول للدالة f، وبما أن z_0 ليس صفراً معزولاً للدالة لكون $f(z) = 0$ لكل z في N فإن $f(z) = 0$ لكل z في D.

ومما تجدر الإشارة إليه أن النظرية السابقة تبين أن الاستمرار التحليلي لدالة ما إن وجدت فإنها تكون واحدة ووحيدة. انظر التمرين (١).

مثال (١):

برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي البسيط أن:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

الحل: لنفرض أن الدالة f معرَّفة بالمساواة التالية:

$$f(z) = \cos 2z$$

وهذه الدالة تحليلية لكل z في المستوي المركب وكذلك نعرف الدالة g بالمساواة:

$$g(z) = \cos^2 z - \sin^2 z$$

وهي كذلك دالة تحليلية لكل z في المستوي المركب. ولكن من المعلوم من العلاقات المثلثية أن:

$$g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = f(x)$$

لكل عدد حقيقي x ومن ثمّ فإن g تمثل الاستمرار التحليلي للدالة f، وبالاستفادة من المبرهنة السابقة فإن $f = g$ لكل عدد حقيقي يؤكد بأن $f(z) = g(z)$ لكل عدد مركب أي إن:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

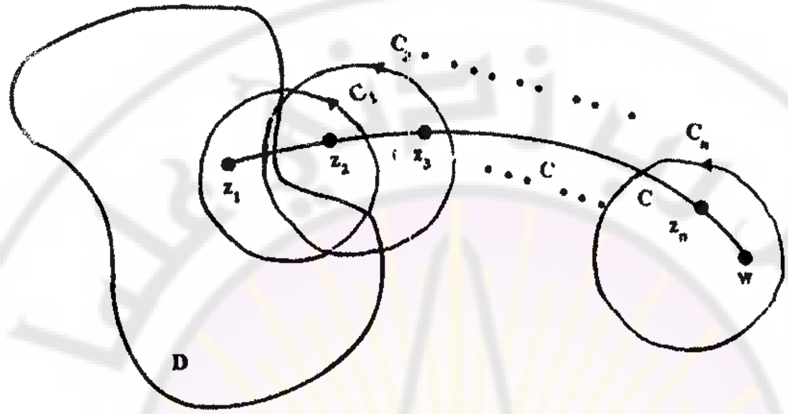
أما الاستمرار التحليلي على مسار فهو معرف فيما يلي:

تعريف (٢):

نفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D. وأن النقطة w خارج المجال D. نريد أن نبحث عن استمرار تحليلي بسيط للدالة f عند النقطة z في D التي يصل بينها وبين النقطة w المسار C وذلك بتمثيل الدالة f بمتسلسلة تايلور عند النقطة z_1 وهي:

$$f_1(z) = \sum \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z - z_1)^k \qquad (3)$$

وهذه المساواة صحيحة على قرص التقارب D_1 الذي مركزه z_1 ومحيطه الدائرة C_1 انظر الشكل (١).



الشكل (١)

فيصبح جزء من المسار C داخل الدائرة C_1 فإذا فرضنا أن z_2 تقع على المسار C وهي خارج المجال D فإن $f(z_2)$ تسمى الاستمرار التحليلي البسيط للدالة f إلى النقطة z_2. ثم نبحث عن استمرار تحليلي بسيط للدالة f عند النقطة z_2، وذلك بإيجاد تمثيل للدالة f_1 (3) بمتسلسلة تايلور عند النقطة z_2 التي تتحقق ضمن قرص التقارب D_2 الذي مركزه z_2 تقع على هذا المسار C وداخل C_2، ولكنها خارج C_1 فإن $f_2(z_3)$ عبارة عن الاستمرار التحليلي البسيط للدالة (3) عند z_3، وهكذا بعد تكرار العملية السابقة n خطوة نحصل على النقاط التالية $z_1, \ z_2,\dots,z_n$ التي تقع على المسار C وتمثل مراكز الدوائر $C_1, C_2, \dots, C_n$ على الترتيب بحيث إن C_n تحتوي على النقطة w بداخلها وكذلك نحصل على الدوال $f_1, \ f_2, \ \dots, \ f_n$ بحيث إن f_k استمرار تحليلي بسيط للدالة f_{k-1} عند z_k وفي هذه الحالة تسمى الدالة $f_n(w)$ استمرار تحليلي للدالة f عند w على المسار C.

ومما يجدر ذكره أنه قد لا يوجد استمرار تحليلي لدالة ما عند نقطة خارج مجالها عند مسار ما وإن وجد مثل ذلك الاستمرار التحليلي فإنه يكون واحداً ووحيداً.

كذلك يمكن أن نؤكد أن الدالة التحليلية f على مجال D تتحدد قيمتها تماماً بقيمتها على مسار داخل D.

الأمثلة التالية توضح فكرة الاستمرار التحليلي على مسار ما.

مثال (٢):

الدالة $g(z)=\frac{1}{1+z}$ تمثل الاستمرار التحليلي للدالة f(z) عند أي نقطة $z \neq -1$ على أي مسار يصل إليها بحيث:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k=\frac{1}{z+1}\quad ,\ |z|<1$$

مثال (٣):

نفرض أن الدالة f معرفة بالمساواة:

$$f(z)=-i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n$$

فبيّن أن الدالة $g(z)=\frac{1}{z}$ استمرار تحليلي للدالة f من مجال تقارب f إلى المستوي المركب z بحيث $z \neq 0$.

الحل:

نلاحظ أن مجال التقارب للدالة f هو القرص $|z-i|<1$ وحيث إنها متتالية هندسية فإنها تتقارب على هذا المجال للدالة:

$$f(z)=-i\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}=\frac{1}{z}$$

ومن ثمَّ فإن $f(z)=g(z)=\frac{1}{z}$ لكل z في المجال $|z-i|<1$ (ما عدا بالطبع
$z=0$) ومن ثمَّ فإن g تمثل الاستمرار التحليلي للدالة f على جميع الأعداد المركبة $z\neq 0$.

مثال (٤):

أوجد قيمة الاستمرار التحليلي للدالة f حيث:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{k}$$

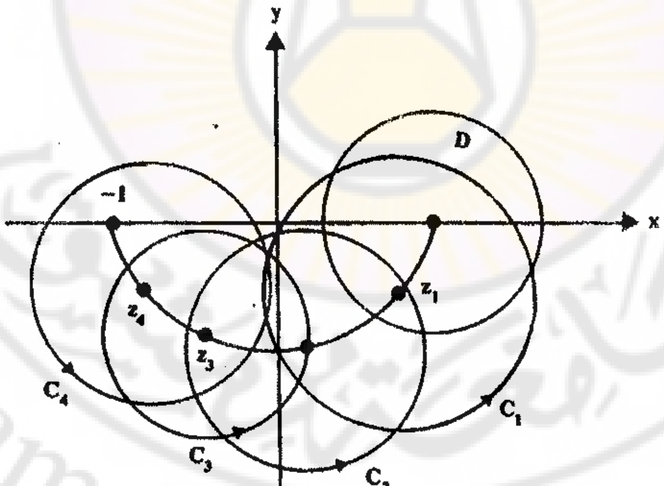
عند النقطة 1- على مسار يصل بين النقطة 1 والنقطة 1- في النصف السفلي من المستوي.

الحل: بإيجاد نصف قطر التقارب للدالة f وهو 1 حيث إن قرص التقارب هو:

$$D: |z-1|<1$$

وكذلك يمكن أن نتعرف على أن هذه الدالة تتوافق مع الدالة g حيث:

$$g(z)=\log z$$



الشكل (٢)

ما عدا بالطبع $z = 0$ وكل النقاط التي تقع على الجزء السالب من المحور الحقيقي وبما أن -1 تقع خارج مجال التقارب D فإننا نريد أن نبحث عن استمرار تحليلي للدالة f عند -1 على المسار C الذي يصل بين النقطتين 1 , -1.

وبما أن الدالة $\log z$ متعددة القيمة فإنه يمكن اختيار الفرع المناسب لهذه الدالة فمثلاً يمكن أن نجد الاستمرار التحليلي إلى النقطة z_2 لنحصل على g_2 في داخل الدائرة C_2 أي إن الدالة:

$$g_2(z) = \ln|z| + i \arg z, \ -2\pi \le \arg z < 0$$

تمثل هذا الفرع المناسب، فهي توافق $\log z$ عند z_2، ومن ثمّ توافق f عند z_2 وهكذا نبحث عن استمرار تحليلي للدالة g_2 عند z_3 داخل الدائرة C_3. فنختار الفرع المناسب للدالة $\log z$ وهو كذلك g_4 حيث:

$$g_4(z) = \ln |z| + i \arg z \ , \ -2\pi \le \arg z < 0$$

وحيث إن -1 تقع داخل الدائرة C_4 فإن قيمة الاستمرار التحليلي عند -1 هو:

$$g_4(-1) = -\pi i$$

أي إن:

$$f(-1) = g_4(-1) = -\pi i$$

٣ . ٢ . الدالة المطابقة (المشاكلة):

إذا فرضنا أن الدالة f تحليلية عند نقطة z_0 فإنه يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (4)$$

وكذلك يمكن كتابتها على الصيغة:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)g(z) \qquad (5)$$

حيث إن:

$$g(z)=\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)+\frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^2+\dots$$

وتحقق:

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=0$$

ومن ثمَّ إذا قصرنا بحثنا في خصائص الدالة f موضعياً عند z_0 أي في جوار (مفتوح) وصغير مركزه z_0 فإن الدالة f يمكن أن تقرَّب بدالة خطية:

$$f(z_0)\cong f(z_0)+f'(z_0)\,(z-z_0) \qquad (6)$$

ومن المعروف أن تأثير الدالة الخطية $f(z_0)+f'(z_0)\,(z-z_0)$ عبارة عن انسحاب بمقدار $f(z_0)$ ثم دوران بمقدار $\arg f'(z_0)$ وكذلك تكبير بمقدار $|f'(z_0)|$ (الذي يسمى معامل القياس) وأن الدالة الخطية بالتالي تحافظ على الزوايا بين المسارات المارة في z_0 فهل تكتسب الدالة التحليلية مثل هذه الصفة وهي المحافظة على الزوايا بين المسارات المتقاطعة في نقطة ما، هذه الفكرة يبرزها التعريف التالي:

تعريف (٣):

إذا كانت الدالة f تحليلية عند z_0 وتحافظ على الزاوية بين المسارات المتقاطعة في النقطة z_0 فإنها تسمى دالة مطابقة (مشاكلة) (Conformal Mapping).

المبرهنة التالية تبين الشرط الذي يلزم تحققه لتكون الدالة f مطابقة.

مبرهنة (٢):

بفرض أن الدالة f تحليلية عند النقطة z_0 وكانت $f'(z_0)\neq 0$ فإن f تكون مطابقة (أي تحافظ على الزاوية بين المسارات المتقاطعة في النقطة z_0).

البرهان:

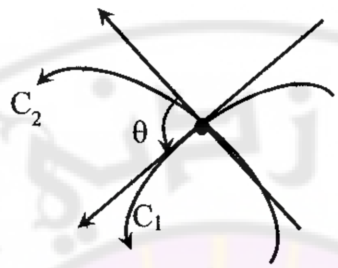
لنفرض أن C_1، C_2 مساران متقاطعان في النقطة z_0 ومعرفان بالمعادلتين:

$$c\le s\le d\ ,\ z_2(s),\ z_1(t)\ ,\ a\le t\le b$$

فتكون الزاوية بين C_1 ,C_2 هي الزاوية بين المماسين لهما وهي θ حيث:

$$\theta = \arg z_2'(s) - \arg z_1'(t) \qquad (7)$$

حيث إن: $z_0 = z_1(t_0) = z_2(s_0)$



وكذلك إذا فرضنا أن الدالة f تنقل المسارين C_1، C_2 إلى المسارين γ_1، γ_2 على الترتيب فإن γ_1، γ_2 معرفتان بالمعادلتين:

$$w_2 = f(z_2(s)) \ , \ w_1 = f(z_1(t)) \ , \ c \le s \le d \, , a \le t \le b \qquad (8)$$

وتكون الزاوية بين γ_1، γ_2 هي الزاوية بين المماسين لهما وهي ϕ حيث:

$$\phi = \arg w'_2 - \arg w'_1 \qquad (9)$$

وبشكل عام إذا فرضنا أن γ تمثل بالمعادلة:

$$w = f(z(t)) \, , a \le t \le b \qquad (10)$$

فإن قاعدة السلسلة تؤكد أن:

$$w'(t) = f'(z)\, z'(t) \qquad (11)$$

ومن ثمّ فإن:

$$\begin{cases} w_1'(s_0) = f'(z_0) z_1'(s_0) \\ w_2'(t_0) = f'(z_0) z_2'(t_0) \end{cases} \qquad (12)$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\begin{cases} \arg w_1' = \arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0) \\ \arg w_2' = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(s_0) \end{cases} \qquad (13)$$

وإذا كان $f'(z_0) \neq 0$ فإن $\arg f'(z_0) \neq 0$ ومن ثمَّ يكون:

$$\arg w'_2 - \arg w'_1 = \arg z'_2 (s_0) - \arg z'_1 (t_0) \qquad (14)$$

ومن ثمَّ فإن $\phi = \theta$ أي أن الدالة حافظت على الزوايا بين المسارين وهي من ثمَّ تكون مطابقة وهذا ينهي إثبات النظرية.

إذا كانت الدالة مطابقة عند كل نقطة في مجال D فإنها تسمى مطابقة على D. أما إذا كانت الدالة تحليلية عند z_0 ولكن $f'(z_0) = 0$ فإنها لا تكون مطابقة عند z_0 وهنا تسمى z_0 نقطة حرجة للدالة f، وقد تكون مطابقة عند نقطة أخرى، فإذا فرضنا أن $f'(z_0) = 0$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z) \qquad (15)$$

حيث إن $g(z)$ تحليلية عند z، $g'(z_0) \neq 0$. لاحظ أن $g(z)$ مطابقة ومن ثمَّ تحافظ على الزوايا. وإذا كان C مساراً ممهداً يمر بالنقطة z_0 ومعرف بالمعادلة:

$$z(t)\ ,\ z_0 = z\ (t_0)\ ,\ a \leq t \leq b$$

فإن صورة هذا المسار C هو γ حيث تكون γ معرفة بالمعادلة:

$$w - w_0 = f(z(t)) - f(z(t_0)) = (z(t) - z_0(t))^m\ g(z(t))$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\arg (w - w_0) = \arg (f(z) - f(z_0)) = m \arg (z - z_0) + \arg g(z) \quad (16)$$

فإذا فرضنا أن:

$$\arg g(z) = \alpha, \lim_{z \to z_0} \arg(z - z_0) = \beta$$

$$\lim_{w \to w_0} \arg(w - w_0) = \delta$$

فإن:

$$\delta = m\ \beta + \alpha$$

فإذا كانت الزاوية بين C_1, C_2 هي على الترتيب β_1, β_2 فإن δ_1, δ_2 هما زاويتان ميل المسارين اللذين يمثلان صورتي C_1, C_2 على الترتيب تحت f ومن ذلك ينتج أن:

$$\delta_2 - \delta_1 = (m\beta_2 + \alpha) - (m\beta_1 + \alpha)$$

أي إن:

$$\delta_2 - \delta_1 = m(\beta_2 - \beta_1) \qquad (17)$$

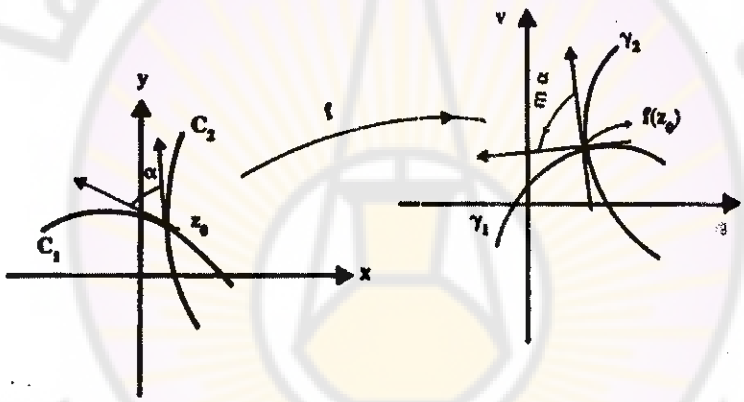
أي إن الزاوية بين المسارين γ_1، γ_2 هي δ_1 - δ_2 وهي m أضعاف الزاوية بين المسارين C_1, C_2 وهي β_1 - β_2 وبهذا نكون قد أثبتنا المبرهنة التالية:

مبرهنة (٣):

نفرض أن الدالة f تحليلية عند z_0 بحيث إن:

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \;,\quad k = 1,2, \ldots, m-1,\;\; f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

فإن الدالة f تكبّر الزاوية بين أي مسارين متقاطعين في النقطة z_0 بمقدار m مرة.



الشكل (٣)

المبرهنة الآتية تبين أن الدالة التحليلية التي تكون مشتقتها ليست صفراً على مجال ما تكون واحداً لواحد على ذلك المجال.

مبرهنة (٤):

نفرض أن الدالة f تحليلية على مجال D فإذا كانت $f'(z) \neq 0$ لكل z في D فإن f واحد لواحد على D.

البرهان:

نفرض أن z_0 نقطة اختيارية في D وأنه لا يوجد جوار (مفتوح) مركزه z_0 تكون عليه الدالة f واحداً – لواحد. لذلك يمكن أن نستنتج أن في كل قرص مفتوح مركزه z_0 يوجد على الأقل نقطتان مختلفتان z ,w بحيث إن $f(w) = f(z)$ ومن هذه الحقيقة نستنتج وجود متتاليتين (w_n), (z_n) من نقاط D بحيث إن $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ وإن $f(w_n) \neq f(z_n)$ لكل $n = 1, 2, \ldots$. فإذا فرضنا أن C كانتور مغلق وبسيط في داخل D فإن f تحليلية على C وفي المنطقة الداخلية له كذلك. وبتطبيق مبرهنة كوشي للتكامل فإن:

$$\frac{f(w_n)-f(z_n)}{w_n-z_n} = \frac{1}{w_n-z_n}\frac{1}{2\pi i} \tag{18}$$

$$\left\{\int_c \frac{f(s)}{s-w_n}ds - \int_c \frac{f(s)}{s-z_n}ds\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i(w_n-z_n)}\int_c \frac{f(s)(w_n-z_n)}{(s-w_n)(s-z_n)}ds$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ فإن:

$$\lim_{\substack{z_n\to z_0\\ w_n\to z_0}} \int_c \frac{f(s)}{(s-w_n)(s-z_n)}ds = \int_c \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds$$

وعليه فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n)-f(z_n)}{w_n-z_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds \tag{19}$$

وباستخدام مبرهنة كوشي للمشتقة فإن الطرف الأيمن يمثل $f'(z_0)$. أما الطرف الأيسر فإنه يساوي صفراً ومن ثمّ فإن $f'(z_0) = 0$ وهذا يناقض الفرض مبيناً أن الدالة يجب أن تكون واحداً لواحد منهياً بذلك إثبات المبرهنة.

المبرهنة الآتية هي نتيجة للمبرهنة السابقة ونترك إثباتها تمريناً للقارئ.

مبرهنة (٥):

إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال D وكانت كذلك واحداً - لواحد على D فإنها تكون مطابقة على ذلك المجال.

الأمثلة التالية توضح فكرة الدالة المطابقة.

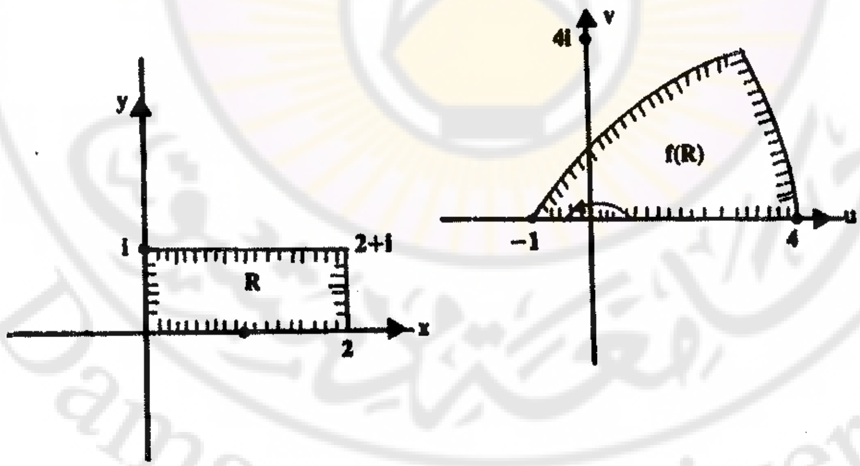
مثال (٦):

بما أن الدالة $f(z) = e^z$ دالة تحليلية على كل المستوى المركب وكذلك $f'(z) = e^z \neq 0$ لكل z في المستوي فإن الدالة f تكون مطابقة على كل المستوي.

مثال (٧):

الدالة $f(z) = z^2$ تحليلية على كل المستوي المركب ولكن $f'(0) = 0$ عند النقطة $z_0 = 0$ ومن ثمّ فإن الدالة f ليست مطابقة عند النقطة $z_0 = 0$ وبما أن $f''(z)= 2 \neq 0$ فإن المبرهنة (٣) تؤكد أن الدالة f تكبّر الزاوية عند $z_0 = 0$ بمقدار $m = 2$ ومن ثمّ لإيجاد صورة المستطيل R، حيث:

$$R = \{x + yi : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$



الشكل (٤)

فإن صورة الزاوية القائمة عند $z_0 = 0$ تضاعف لتصبح الزاوية المستقيمة π في المستوي u, v وبالحساب يمكن معرفة أن صورة النقاط $2, 2 + i, i$ هي على الترتيب $4, 3 + 4i, - 1$. ولإيجاد صور القطع المستقيمة نجد العلاقات التالية:

$$u + vi = (w = f(z) = z^2) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

ومن ثمَّ فإن:

$$u = x^2 - y^2 , v = 2xy$$

وحيث إن $x \geq 0$, $y \geq 0$ في المستطيل R فإن $v = 2xy > 0$ أي إن $\operatorname{Im} w > 0$ وبحذف المتغيرات y, x بين العلاقتين $v = 2xy$, $u = x^2 - y^2$ عندما تأخذ هذه المتغيرات القيم على أضلاع المستطيل نجد أن صورة ضلع المستطيل $y = 1, 0 < x < 2$ هي $\frac{1}{4}v^2 - u = 1$ وكذلك صورة ضلع المستطيل $x = 2$ بحيث $0 < y < 1$ هي: $u + \frac{1}{16}v^2 = 4$ وعليه فإن صورة المستطيل تأخذ الشكل (٤).

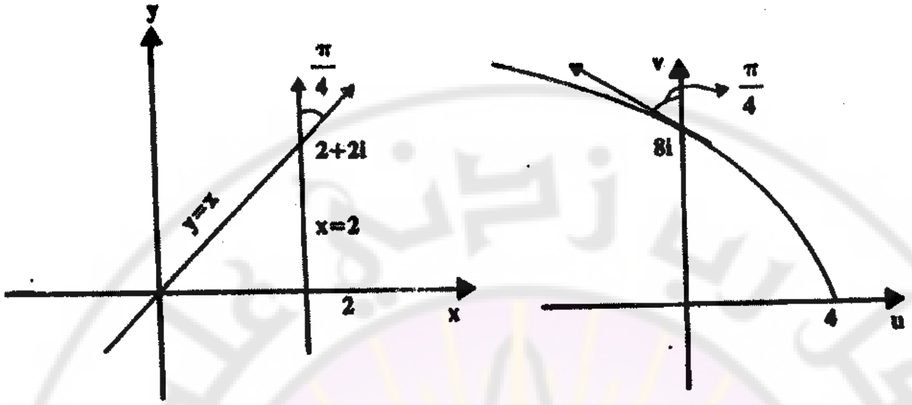
لاحظ أن مقياس التكبير هو: (20) $\quad |f'(z_0)|$

فيكون عند $z = 2 + i$ هو: $|f'(z)| = 2|2 + i| = 2\sqrt{5}$

مثال (٨):

لاحظ أن الدالة $f(z) = z^2$ في المثال السابق دالة مطابقة عند كل $z \neq 0$. وذلك لأن $f'(z) = 2z \neq 0$ فإذا أخذنا المسارين $y = x$ و $x = 2$ المتقاطعين عند النقطة $z_0 = 2 + 2i$ فسنبين أن الدالة تحافظ على الزاوية بين صورتي هذين المسارين وهي $\theta = \frac{\pi}{4}$ ولنرَ ذلك نستعين بالعلاقتين $v = 2xy, u = x^2 - y^2$ ولإيجاد صورة المسار الأول المعرف بالمعادلة $y = x$ فإن $u = 0$ وكذلك $v = 2y^2 > 0$ يحددان صورة هذا المسار ومن ثمَّ فإن صورة المسار $y = x$ هو النصف الموجب من المحور التخيلي v ولإيجاد صورة المسار الثاني المعرف بالمعادلة $x = 2$ فإن $v = 4y, u = 4 - y^2$ وبحذف y من

كلتا المعادلتين نجد صورة المسار $x = 2$ وهي: $u = 4 - v^2/16$ وهذه تمثل قطعاً مكافئاً.



الشكل (٥)

لاحظ أن الزاوية هي $\mathrm{Arg}\,(f'(2+2i))$ وهي:

$$\mathrm{Arg}\,(4+4i) = \pi/4$$

أي إن الزاوية هي $\pi/4$ تماماً كما كانت بين المسارين: $x = 2 , y = x$.

مثال (٩):

لاحظ أن الدالة $f(z) = \cos z$ دالة مطابقة عند جميع z بحيث إن: $z \neq n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ وهي التي تجعل $f'(z) = -\sin z$ صفراً.

أما عند هذه النقاط فإن الدالة ليست مطابقة.

ننهي هذا البند بملاحظة أن الدالة المطابقة عند نقطة z_0 يوجد لها نظير موضعي أي دالة عكسية موضعية أي معرفة على جوار (مفتوح) ومركزه النقطة z_0 فإذا رمزنا للدالة العكسية الموضعية بالرمز g وللدالة بالرمز f فإن العلاقة بين مشتقتي الدالتين (وهي معروفة) هي:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad (21)$$

لكل z في الجوار (مفتوح) الذي مركزه z_0. ولربط هذه الفكرة بالتفاضل المتقدم نستفيد من معادلتي كوشي . ريمان وكون الدالة f تحليلية حيث إن الجاكوبي لهذه الدالة هو:

$$J(f) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2 \qquad (22)$$

فإذا كانت هذه الدالة مطابقة فإن $f'(z_0) \neq 0$ ومن ثمَّ فإن الجاكوبي $J(f) \neq 0$ مؤكد أن الدالة f لها دالة عكسية في جوار (مفتوح) حول z_0.

٣ . ٣ . الدالة مزدوجة الخطية:

نتناول في هذا البند نوعاً هاماً من الدوال يمثل عائلة من الدوال المطابقة ولها تطبيقات كثيرة وتسمى الدالة مزدوجة الخطية.

الدالة مزدوجة الخطية:

لأي أربعة أعداد مركبة $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ نعرِّف الدالة f بالمساواة التالية:

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \;,\; \alpha\,\delta \neq \beta\,\gamma \qquad (23)$$

هذه الدالة دالة نسبية ومن ثمَّ لها قطب بسيط عند النقطة $z_0 = -\delta/\gamma$ أما الشرط $\alpha\,\delta \neq \beta\,\gamma$ فهو ضروري حتى لا تكون الدالة ثابتة القيمة. ولهذه الدالة خصائص هامة كثيرة نلخصها فيما يلي:

أ . الدالة f مطابقة عند جميع الأعداد المركبة عدا القطب $z_0 = -\delta/\gamma$ طبعاً. لأن:

$$f'(z) = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma z + \delta)^2} \neq 0 \qquad (24)$$

لأن $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$.

ب . بالاستفادة من مبرهنة (٤) فإن الدالة f واحد - لواحد كذلك على جميع نقاط المستوي عدا القطب $-\delta/\gamma$ أي على المجال $D = C - \{-\delta/\gamma\}$.

جـ . يمكن إعادة تعريف هذه الدالة لتصبح واحداً لواحد على كرة ريمان أي على المجال $D = C \cup \{\infty\}$ وذلك كما يلي:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, z \neq -\delta/\gamma \\ \infty, z = -\delta/\gamma \\ \alpha/\gamma, z = \infty \end{cases} \qquad (25)$$

د . لكون هذه الدالة واحداً - لواحد على المجال $D = C - \{-\delta/\gamma\}$ فيوجد لها دالة عكسية هي:

$$z = h(w) = \frac{-\delta w+\beta}{\gamma z-\alpha} \qquad (26)$$

حيث إن:

$$w = f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\alpha}$$

ويمكن كتابة كل منهما بدلالة المتغيرين z, w كما يلي:

$$\alpha z + \beta = w\gamma z + \delta w \qquad (27)$$

ومن هذه العلاقة يتبين لنا سبب التسمية باسم مزدوجة الخطية فهذه العلاقة تبيِّن أن الدالة خطية بالمتغير z وهي كذلك خطية بالمتغير w.

هـ . ولكون هذه دالة يمكن تعريفها لتصبح واحداً - لواحد على المجال $D = C \cup \{\infty\}$ فإنه يوجد لها دالة عكسية وهي:

$$g^{-1}(z)=\begin{cases}\dfrac{-\delta z+\beta}{\gamma z-\alpha}\;,\; z\neq\alpha/\gamma\\ \infty\;,\; z=\alpha/\gamma\\ -\delta/\gamma\;,\; z=\infty\end{cases}\qquad(28)$$

و . يمكن اعتبار هذه الدالة مزدوجة الخطية على أنها تركيب لعدة دوال مثل الإزاحة والدوران والتكبير والمقلوب. انظر تمرين (٢٤).

ز . من أهم خصائص هذه الدالة أنها تنقل مجموعة الدوائر والخطوط المستقيمة إلى نفسها أي إن صورة الدائرة إما أن تكون دائرة وإما خطاً مستقيماً، وكذلك صورة الخط المستقيم إما أن تكون دائرة وإمّا خطاً مستقيماً.

ح . يمكن إيجاد دالة مزدوجة الخطية تنقل أيَّ ثلاث نقاط مختلفة في المستوي إلى أي ثلاث نقاط متميزة أخرى. فإذا أردنا أن نجد الدالة المزدوجة الخطية التي تنقل النقاط $z_1,\ z_2,\ z_3$ إلى $w_1,\ w_2,\ w_3$ على الترتيب فإننا نجد w كدالة في z من النسبة التالية:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\qquad(29)$$

هذه علاقة جبرية تبيِّن أن صورة z_1 هي w_1 وصورة z_2 هي w_2 وكذلك صورة z_3 هي w_3. وكذلك هي مزدوجة الخطية إذا حصلنا على الضرب التبادلي لهذه العلاقة. وإذا كانت إحدى النقاط المطلوبة هي الرمز ∞ فإننا نفرض أن النسبة التي تحتوي على هذه النقطة هي 1. وبدقة أكثر نفرض أن إحدى النقاط $w_1=\infty$ فإننا نفرض أن $\frac{w-w_1}{w_2-w_1}=1$ وهي التي تحتوي على w_1 لنحصل على العلاقة المطلوبة وهي:

$$\frac{w_2-w_3}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\qquad(30)$$

سنبيّن ونوضح الحقائق من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (١٠):

أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل النقاط i ,2 ,1- إلى النقاط I, -3, 1.

الحل:

بتطبيق العلاقة (29) حيث إن:

$$z_1 = -1, z_2 = 2 , z_3 = i, w_1 = i , w_2 = -3 , w_3 = 1$$

لنحصل على:

$$\frac{(w-i)(-3-1)}{(w-1)(-3-i)} = \frac{(z+1)(2-i)}{(z-i)(2+1)}$$

ومنها فإن:

$$\frac{4(w-i)}{(w-1)(3+i)} = \frac{(z+1)(2-i)}{3(z-i)}$$

وبإجراء العمليات الجبرية اللازمة لإيجاد w بدلالة z نحصل على الدالة المطلوبة وهي:

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

حيث إن:

$$\alpha = -7 + 13i \;,\; \beta = 5 + i = \gamma \;,\; \delta = -7 - 11\,i$$

مثال (١١):

أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل النقاط $2, 1 + i, 0$ إلى النقاط $0, 1, \infty$.

الحل:

بتطبيق فكرة العلاقة (30) حيث إن:

$$z_1 = 2, z_2 = 1 + i, z_3 = 0, w_1 = 0 , w_2 = 1 , w_3 = \infty$$

أي بفرض أن: $\dfrac{w_2 - w_3}{w - w_3} = 1$ لنحصل على العلاقة:

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

ومنها فإن:

$$w = \frac{(z-2)(1+i)}{z(1+i-2)}$$

أي أن:

$$w = \left(\frac{1+i}{-1+i}\right)\frac{z-2}{z}$$

ويمكن تبسيط هذه الدالة لتصبح كما يلي:

$$w = \frac{-iz + 2i}{z}$$

مثال (١٢):

بيِّن أن الدالة:

$$f(z) = \frac{1+z}{i(1-z)}$$

تنقل قرص الواحدة $|z| < 1$ إلى نصف المستوي السفلي.

الحل:

لنكتب الدالة على الشكل الآتي:

$$w = f(z) = \frac{iz + i}{z - 1}$$

لنحصل على قيم الثوابت $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ وهي:

$$\alpha = i = \beta \ , \ \gamma = 1 \ , \ \delta = -1$$

وبالتالي فإنه يوجد دالة عكسية لهذه الدالة وهي:

$$z = g(w) = \frac{w+i}{w-i}$$

وذلك بتطبيق العلاقة (26). وحتى نبحث تأثير هذه الدالة في القرص المفتوح نبحث عن صورة دائرة الوحدة $|z| = 1$ وبالتعويض في الدالة العكسية لنحصل على:

$$1 = |z| = \left|\frac{w+i}{w-i}\right|$$

أي إن:

$$|w+i| = |w-i|$$

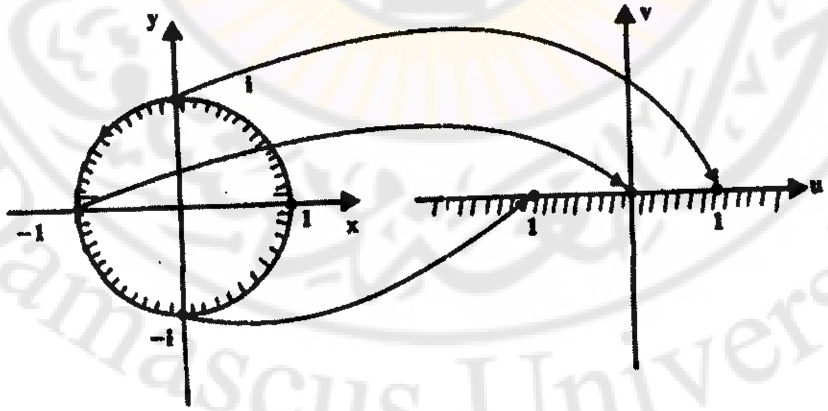
وبالتعويض بدلاً من w بالقيمة $u + vi$ نحصل على:

$$|u + (v+1)\, i| = |u + (v-1)\, i|$$

ومنه فإن:

$$u^2 + (v+1)^2 = u^2 + (v-1)^2$$

وهذا ينتج المعادلة $v = 0$ وهذا يعني أن صورة دائرة الوحدة هي المحور الحقيقي u $(v = 0)$ حيث إن $f(-1) = 0$ وكذلك $f(i) = 1$.



الشكل (٦)

وينصح هنا بتوضيح الاتجاه الموجب للكانتور $|z| = 1$ لنحدد اتجاه صورته وهي المحور الحقيقي بالاتجاه السالب، (وذلك بأخذ صورة عدة نقاط على الدائرة لتوضيح الاتجاه)، فتكون صورة المنطقة الداخلية للكانتور $|z| = 1$ هي المنطقة التي تقع على يساره صورة هذا الكانتور أي النصف السفلي للمستوي المركب، وللتحقق من ذلك نفرض أن $|z| < 1$ في الدالة العكسية لنحصل على أن $|w - i| < |w + i|$ وبكتابة هذه العلاقة على الصورة $|w - i| < |w - (-i)|$ والتي تفسر على أن المسافة بين w و $i-$ أصغر من المسافة بين w و i وهذا الشرط ينطبق على النصف السفلي للمستوي.

مثال (١٣):

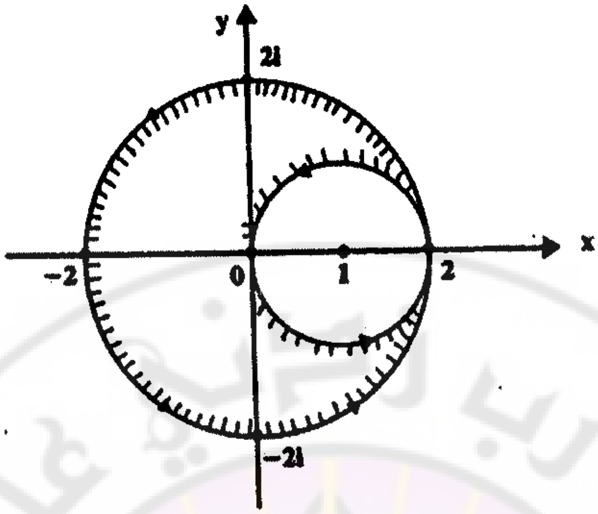
ابحث في تأثير الدالة $f(z) = \dfrac{1}{z}$ على المستوي المركب. (أي بين أنها تنقل الدائرة إلى دائرة أو خط مستقيم، وكذلك الخط المستقيم تنقله إلى دائرة أو خط مستقيم).

الحل:

من الواضح أن هذه الدالة تنقل كرة ريمان إلى نفسها بشكل واحد - لواحد حيث إن $f(z) = \infty$ و $f(\infty) = 0$ وأن $f(z) = \dfrac{1}{z}$ لباقي الأعداد المركبة. وهي كذلك حالة خاصة من الدالة $f(0) = \infty$ مزدوجة الخطية، لذلك فهي دالة مطابقة عند كل الأعداد المركبة باستثناء $z = 0$. ومن تأثيرها على المستوي أنها تنقل دائرة الوحدة إلى نفسها بحيث إن $f(z) = \bar{z}$ لكل $|z| = 1{:}z$ وكذلك تنقل كل نقطة في داخل قرص الوحدة إلى نقطة خارج هذا القرص وذلك إذا فرضنا أن $|z| < 1$ فإن $w = \dfrac{1}{z}$ ومنه $|z| = \dfrac{1}{|w|}$ ومن ثمَّ فإن أي إن $|w| > 1$. أما الدالة العكسية لهذه الدالة فهي نفسها.

مثال (١٤):

أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل المنطقة الهلالية في الشكل (٧) إلى شريحة لا نهائية.



الشكل (٧)

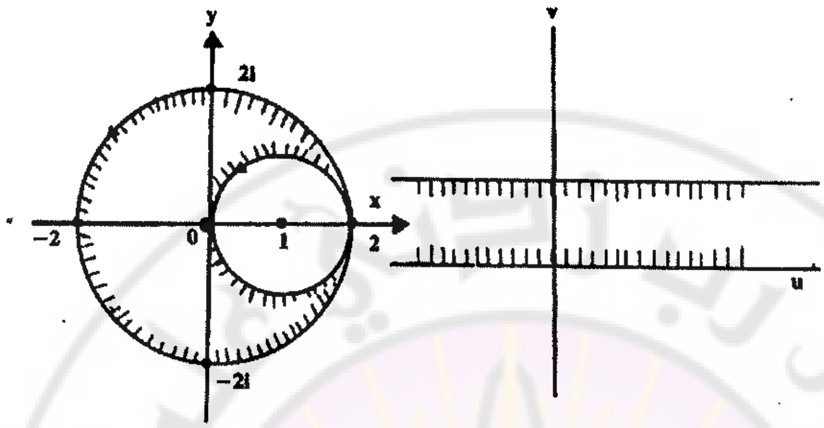
الحل:

المنطقة المطلوب إيجاد صورتها هي داخل الدائرة $|z| = 2$ وخارج الدائرة $|z - 1| = 1$.
أولاً نحاول أن نجد دالة مزدوجة الخطية تنقل الدائرة $|z| = 2$ إلى المحور الحقيقي u مثلاً والقرص إلى النصف العلوي من المستوي المركب، وذلك باختيار ثلاث نقاط على الدائرة مرتبة حسب الاتجاه الموجب لها، وثلاث نقاط على المحور الحقيقي بالاتجاه الموجب مثلاً: $z_1 = -2, z_2 = -2i, z_3 = 2$ وكذلك $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$ وبتطبيق فكرة العلاقة (30) وإجراء العمليات الجبرية اللازمة للتبسيط نجد أن الدالة المطلوبة هي:

$$w = \frac{-i(z+2)}{(z-2)} \qquad (31)$$

وحسب التعريف فإن هذه الدالة (31) تنقل الدائرة $|z| = 2$ إلى المحور الحقيقي (المغلق) u (أي أن $v = 0$). وحسب الاتجاه يتبين أن صورة القرص المفتوح $|z| < 2$ هي نصف المستوي المركب uv العلوي. وللتأكد من ذلك علينا أن نبين أنه إذا كانت $|z| < 2$

فإن $\operatorname{Im} w > 0$ وبإيجاد الدالة العكسية للدالة (31) (وذلك باستخدام العلاقة (26)) وهي:



الشكل (٨)

$$z = \frac{2w - 2i}{w + i}$$

حيث إن: $\alpha = -i, \beta = -2i, \gamma = 1, \delta = -2$

وحيث إن $|z| < 2$ فإن: $|z| = \left|\frac{2w - 2i}{w + i}\right| < 2$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن: $|w - i| < |w - (-i)|$

وهذه العلاقة تفسر على أن بعد w عن النقطة i أصغر من بعد النقطة w عن $-i$ وهذا لا يكون إلا في النصف العلوي من المستوي المركب uv حيث $\operatorname{Im} w > 0$.

الخطوة التالية هي أن نجد صورة الدائرة $|z - 1| = 1$ تحت الدالة (31) وذلك باختيار ثلاث نقاط مختلفة $1 - i$, 0 , $1 + i$ وبالتعويض في الدالة (31) نجد أن صورها هي على الترتيب.

$w_1 = f(1 + i) = -2 + i$

$w_2 = f(0) = i, w_3 = f(1 - i) = 2 + i$

نلاحظ أن هذه الصور $i\ ;\ 2+i,\ -2+i$ تقع جميعها على الخط المستقيم $v = 1$

وبذلك فإن صورة المنطقة الهلالية هي الشريحة R حيث:

$$R = \{w: 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$$

المثال التالي يناقش دالة من أهم الدوال المطابقة المزدوجة الخطية لأنها تنقل قرص الوحدة المفتوح إلى نفسه.

مثال (١٥):

بيِّن أن الدالة مزدوجة الخطية المعرفة بالمساواة التالية:

$$f(z) = \bar{\lambda}\frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}\cdot z}\ ,\ |\lambda| = 1\ ,\ |\alpha| < 1 \qquad (32)$$

تنقل قرص الوحدة الفتوح $|z| < 1$ إلى نفسه.

الحل:

بما أن $\bar{\lambda}\alpha\ \bar{\alpha} \neq -\bar{\lambda}$ فإن الدالة:

$$f(z) = \frac{\bar{\lambda}\alpha - \bar{\lambda}z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

واحد - لواحد والدالة العكسية لها هي:

$$g(w) = \frac{-w + \alpha\bar{\lambda}}{-\bar{\alpha}w + \bar{\lambda}} = \frac{-\lambda w + \alpha}{-\bar{\alpha}\lambda w + 1}$$

ومن ذلك فإن:

$$g(w) = \lambda\frac{\alpha\bar{\lambda} - w}{1 - \bar{\alpha}\lambda w}$$

ومن السهل التحقق من أن $gof(z) = z$ وأن $gof(w) = w$ ونترك ذلك للقارئ.

بقي أن نثبت أنه إذا كان $|z| < 1$ فإن $|f(z)| < 1$ وكذلك إذا كان $|w| < 1$ فإن $|g(w)| < 1$ ويكفي أن نثبت الأول ونترك الثاني تمريناً للقارئ، ولذلك نفرض أن $|z| < 1$ فإن:

$$|f(z)|^2 = \frac{|\alpha|^2 - 2\,\mathrm{Re}.(\bar{\alpha}z) + |z|^2}{1 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z) + |\alpha|^2 |z|^2}$$

وكذلك فإن $|f(z)| < 1$ عندما يتحقق الشرط:

$$|\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}\,.\,(\bar{\alpha}z) + |z|^2 < 1 - 2\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}z) + |\alpha|^2\,|z|^2$$

ومن ذلك فإن:

$$|\alpha|^2 + |z|^2 < 1 + |\alpha|^2\,|z|^2$$

وهذه المتباينة يمكن أن تكتب بالصيغة التالية:

$$1 + |\alpha|^2\,|z|^2 - |\alpha|^2 - |z|^2 > 0$$

ومن ذلك فإن:

$$(1 - |z|^2)\,(1 - |\alpha|^2|) > 0$$

وبما أن $|z| < 1\,,\,|\alpha| < 1$ فإن:

$$(1 - |z|^2) > 0\,,\,(1 - |\alpha|^2) > 0$$

وهذا ينهي إثبات أن $|f(z)| < 1$.

أي إن هذه الدالة تنقل القرص المفتوح $|z| < 1$ إلى القرص المفتوح $|w| < 1$. وبما أن $|\lambda| = 1$ فإنها تأخذ الشكل $\lambda = e^{\theta i}$ حيث إن $\theta = \arg\lambda$ وبالتالي فإن الدالة (32) تأخذ الشكل التالي:

$$f(z) = e^{-\theta i}\,\frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \qquad (33)$$

لاحظ كذلك أن $f(0) = \alpha\,\bar{\lambda}\,,\,f(\alpha) = 0$ وأن $g(0) = \alpha$. المثال التالي يبين كيف يمكن الاستفادة من تركيب الدوال للحصول على صورة محددة.

مثال (١٦):

بين أنه يمكن أن تنقل المنطقة الهلالية المعرفة في المثال (١٤) إلى كل المستوى المركب uv.

الحل:

يمكن الاستفادة من مثال (١٤) كخطوة أولى حيث إن الدالة:

$$w = f(z) = \frac{-i(z+2)}{z-2}$$

تنقل المنطقة الهلالية إلى الشريحة:

$$R = \{w: 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$$

والآن ننتقل إلى الخطوة الثانية وهي إيجاد دالة تنقل الشريحة R إلى كل المستوي المركب، وهنا نفكر بدالة دورية مثل e^z ولكن هذه الدالة تنقل الشريحة $\{z: 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ إلى كل المستوي المركب وبتعديل الدالة e^z لتصبح $g(z) = e^{\pi}z$ فإنها أي الدالة g تنقل الشريحة R إلى المستوي المركب وبإيجاد تركيب الدالتين f ,g نحصل على الدالة المطلوبة وهي:

$$h(z) = gof(z) = e^{\frac{\pi i(z+2)}{z-2}}$$

مثال (١٧):

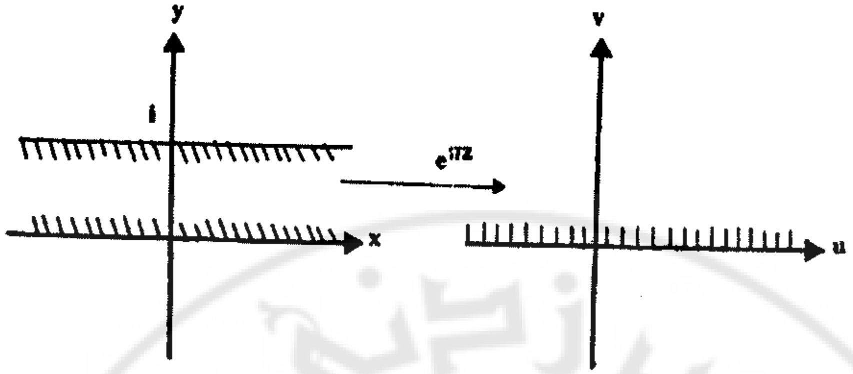
بيّن أنه يمكن أن نجد دالة تنقل شريحة مثل:

$$R = \{z: 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

إلى قرص مثل $|z + 1| < 1$.

الحل:

تبيّن لنا أن الدالة $f(z) = e^{\pi z}$ تنقل الشريحة R إلى نصف المستوي المركب العلوي.



الشكل (٩)

يمكن بالأساليب التي اتبعت في الأمثلة السابقة: إيجاد دالة مزدوجة الخطية تنقل نصف المستوي المركب العلوي إلى القرص $|z+1| < 1$ مثل:

$$g(z) = \frac{-2z+2}{(1+i)z-(1-i)}$$

ومن ثمَّ فإن تركيب الدالتين يحقق المطلوب وهو:

$$h(z) = g((f(z)) = \frac{-2e^{\pi z}+2}{(1+i)e^{\pi z}-(1-i)}$$

والذي ينقل الشريحة R إلى القرص $|z+1| < 1$.

مثال (١٨):

بيّن أن الدالة:

$$h(z) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Log}\frac{i+z}{i-z}$$

تنقل قرص الوحدة $|z| < 1$ إلى الشريحة R حيث:

$$R = \{w: -1 < \operatorname{Im} w < 1\}$$

الحل:

من الواضح الدالة h عبارة عن تركيب دالتين وهما:

$$g(z)=\frac{2}{\pi}\text{Log}z\ ,\ f(z)=\frac{i+z}{i-z}$$

ونترك للقارئ أن يبين أن الدالة f تنقل قرص الوحدة إلى النصف الأيمن من المستوي المركب أما الدالة g فإنها تنقل نصف المستوي هذا للشريحة المذكورة R ونترك تفصيل ذلك للقارئ.

وهكذا يتبين لنا كيف يمكن إيجاد دوال تنقل أي مجال إلى مجال آخر باستخدام تركيب دالة مزدوجة الخطية والدوال الأساسية مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية وغيرها.

٣ . ٤ . تحويل شوارتز ـ كريستوفل (Schwartz – Christoffel):

في أمثلة الدوال المطابقة والدوال مزدوجة الخطية لاحظنا أنه يمكن أن نجد دالة تنقل نصف المستوي العلوي مثلاً إلى قرص مفتوح أو العكس. هذه الحقيقة أثبتها من قبل العالم الألمانيّ ريمان Riemann وعرفت باسمه وهي:

٣ . ٤ . ١ . مبرهنة (مبرهنة تطبيق ريمان):

إذا فرض أن D مجال مترابط ترابطاً بسيطاً، مجموعة النقاط الحدودية له تتكون من نقطتين على الأقل (أي إن D يختلف عن المستوي نفسه) وكانت z_0 نقطة في المجال D فإنه يوجد دالة مطابقة واحد لواحد (تحليلية) f تنقل هذا المجال D إلى قرص الوحدة $|w| < 1$ بحيث إن $f(z_0) = 0$ وإن هذه الدالة تتحدد تماماً بالشرط إن $f'(z_0) > 0$.

نقبل هذه المبرهنة بدون برهان ونترك برهانها لمستوى أعلى من هذا الكتاب. إذن مثل هذه الدالة دائماً موجودة وتنقل أي مجال يحقق شروط المبرهنة إلى قرص الوحدة ويمكن أن نستنتج من ذلك أنه يمكن إيجاد دالة تحليلية وواحد لواحد تنقل أي مجال مترابط ترابطاً بسيطاً نقاطه الحدودية أكثر من نقطتين إلى مجال آخر مثله.

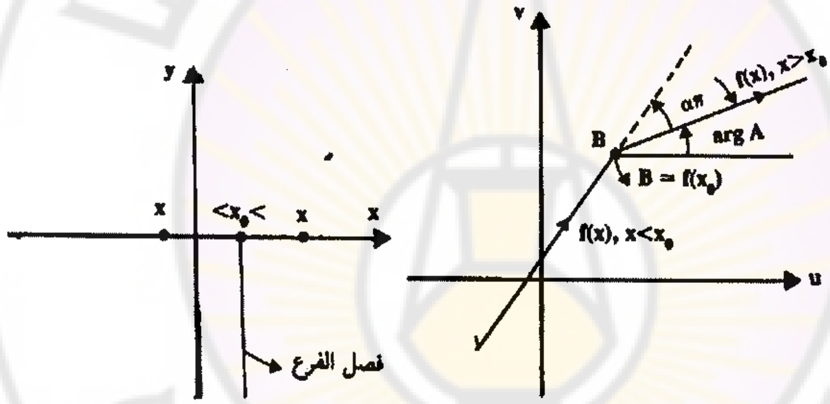
فهل يمكن أن نجد دالة تحليلية واحداً لواحد تنقل النصف العلوي من المستوي إلى مجال محدود بمضلع ما. هذا ما أثبته العالمان شوارتز وكريستوفل (Schwartz – Christoffel).

وحتى نفهم كيفية إنشاء تحويل شوارتز .كريستوفل نمهد له بالمقدمة التالية:

نفرض أن لدينا دالة f تحقق الشرط:

$$f'(z) = A\,(z - x_0)^{\alpha} + B \qquad (34)$$

بحيث إن α, x_0 أعداد حقيقية وإن $-1 < \alpha < 1$ و A, B أعداد مركبة ونريد أن ندرس تأثير هذه الدالة في المحور الأفقي x.



الشكل (١٠)

من الواضح أن صورة x_0 هي $w = B$ وأن الجذر يمكن اختياره في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$ وذلك باعتبار أن الجزء السالب من المستقيم $x = x_0$ محذوف لأنه يمثل فصل الفرع عند x_0.

ولإيجاد صورة الأعداد الحقيقية x نفرض أولاً أن x أكبر من x_0 فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \arg (x - x_0) + \arg A \qquad (35)$$

وبما أن $x - x_0$ موجبة فإن $\arg(x - x_0)$ التي تقع في الفترة المذكورة أعلاه هي 0 ومن ثمَّ فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha . 0 + \arg A$$

وبما أن A عدد مركب ثابت فإن $\arg f'(x) = \arg A$ مقدار ثابت، وعليه فإن صورة كل الأعداد التي تقع على يمين x_0 عبارة عن خط مستقيم يميل بمقدار $\arg A$ عن المحور الحقيقي u. أما إذا كانت أقل من x_0 فإن:

$$\arg f'(x) = \alpha \arg(x - x_0) + \arg A$$

وبما أن $x - x_0$ سالبة (وحقيقية) فإن $\arg(x - x_0)$ التي تقع في الفترة المذكورة أعلاه هي π أي إن:

$$\arg f'(x) = \alpha\pi + \arg A$$

وهذه القيمة ثابتة أيضاً. مما يدل على أن صور كل الأعداد الحقيقية التي تقع على يسار x_0 تقع على خط مستقيم ميله عن المحور الحقيقي u هو $\alpha\pi + \arg A$ والمستقيمان يلتقيان عند النقطة B التي تمثل صورة x_0.

إذا فهمنا ذلك فإنه من الممكن أن نتقدم خطوة أخرى في التعميم للاقتراب أكثر من المطلوب.

نفرض أن الدالة f تحقق الشرط:

$$f'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1}(z - x_2)^{\alpha_2}\dots(z - x_n)^{\alpha_n} \qquad (36)$$

بحيث إن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ أعداد حقيقية تحقق $-1 < \alpha_k < 1;\ k = 1, 2, \dots, n$ وكذلك $x_1, x_2, \dots, x_n$ أعداد حقيقية ولكن A عدد مركب غير الصفر بالطبع وكذلك $-\frac{\pi}{2} < \arg(z - x_k) < 3\frac{\pi}{2}$ لكل $k = 1, 2, \dots, n$ ولدراسة تأثير هذه الدالة في المحور الحقيقي x فإن:

$$\arg(f'(x)) = \arg A + \alpha_1 \arg(x - x_1) + \alpha_2 \arg(x - x_2) +$$

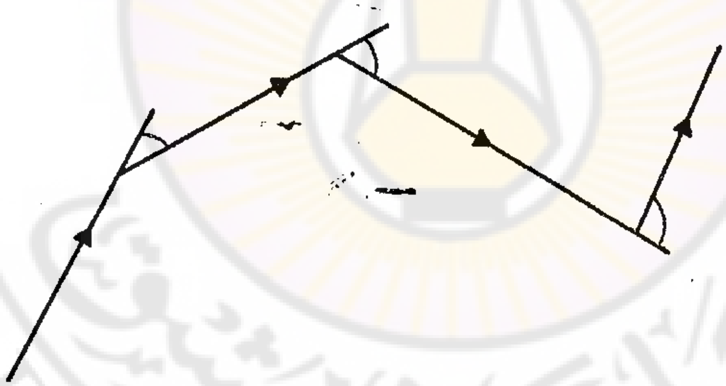
$$+ \ldots + \alpha_n \arg(x - x_n) \qquad (37)$$

وإذا فرضنا أن صور الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي على الترتيب $W_1, W_2, \ldots W_n$ فإن صور القطع المستقيمة هي قطع مستقيمة أخرى زوايا ميلها كما يلي:

الفترة	زاوية الميل
$(-\infty , x_1)$	$\arg A + \alpha_1\pi + \alpha_2\pi + \ldots + \alpha_n\pi$
(x_1, x_2)	$\arg A + \alpha_2\pi + \alpha_3\pi + \ldots + \alpha_n\pi$
....	....
(x_{n-1}, x_n)	$\arg A + \alpha_n\pi$
(x_n, ∞)	$\arg A$

وذلك بتطبيق المقدمة من أسفل إلى أعلى.

مما تقدم يتبين لنا أن الدالة f تنقل المحور الحقيقي x إلى مضلع.

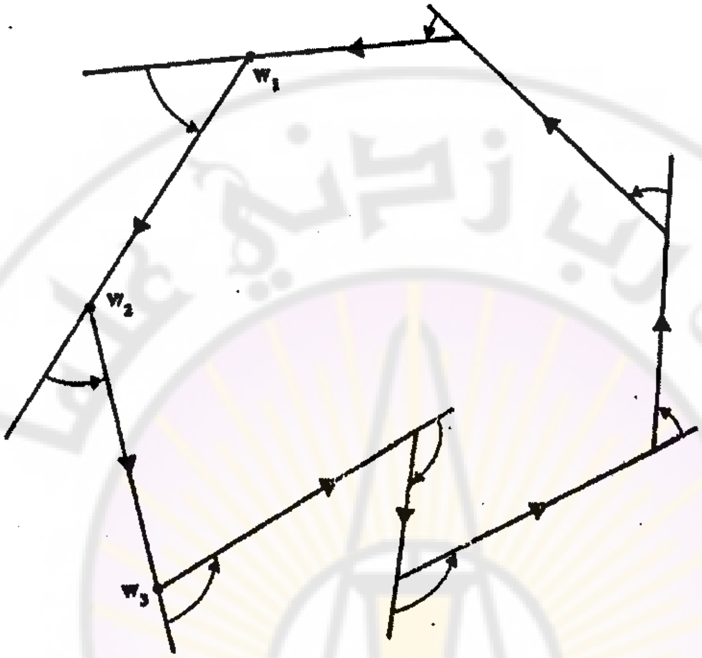


الشكل (١١)

ولإيجاد الدالة f فإنها معرفة بالمساواة التالية:

$$f(z) = A\int_0^z (s - x_1)^{\alpha_1} \cdot (s - x_2)^{\alpha_2} \ldots (s - x_n)^{\alpha n}\, ds + B \qquad (38)$$

وحتى نضع هذه المناقشة بالشكل الاصطلاحي لتحويل شوارتز ـ كريستوفل نريد أن نجد المضلع الموجب الاتجاه ومن ثمَّ تكون الحركة عكس عقارب الساعة كما هي مبينة بالشكل (١٢).



الشكل (١٢)

فيكون قياس الزوايا (زوايا الميل) من الخارج إلى الداخل أي عكس عقارب الساعة ونكون بذلك قد درنا دورة كاملة مقدارها 2π. فإذا فرضنا بدلاً من $\alpha, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ الزوايا $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ التي مجموعها 2π بحيث إن: $-\pi < \theta_k < \pi$ فإن $\alpha_k = -\dfrac{\theta_k}{\pi}$ (لأن $-1 < \alpha_k < 1$) وكذلك إذا فرضنا أن $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ (بحذف x_n حتى يمكن أن نفرضها لتساوي الرمز ∞) بحيث إن:

$$w_1 = f(x_1)\ ,\ w_2 = f(x_2)\ \ldots\ ,\ w_{n-1} = f(x_{n-1})\ ,$$
$$w_n = f(\infty)$$

فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z) = A\int_0^z (s - x_1)^{-\theta_1/\pi}(s - x_2)^{-\theta_2/\pi}\dots(s - x_{n-1})^{-\theta_{n-1}/\pi}dx + B \quad (39)$$

وهذه الدالة تسمى تحويل شوارتز ـ كريستوفل.

٣ . ٤ . ٢ . مبرهنة (مبرهنة شوارتز ـ كريستوفل):

إذا كان K مضلعاً في المستوي له الرؤوس $w_1, w_2, \dots, w_n$ بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) وكانت زواياه الخارجية هي على الترتيب $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ فغنه يوجد أعداد حقيقية $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ وعدد مركب A بحيث إن الدالة f المعرفة بالمساواة (39) تنقل نصف المستوي العلوي بشكل واحد لواحد إلى المنطقة الداخلية للمضلع K بحيث إن:

$$w_1 = f(x_1)\ ,\ w_2 = f(x_2), \dots, w_{n-1} = f(x_{n-1})\ ,\ w_n = f(\infty)$$

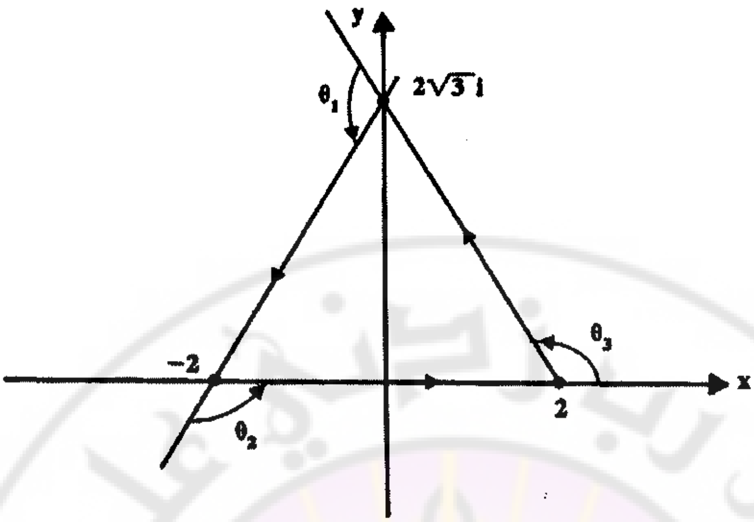
بحيث إن $w_n = f(\infty)$ تفهم على أنها:

$$f(\infty) = w_n = \lim_{|x|\to\infty} f(x)$$

نترك برهان هذه المبرهنة لمستوى أعلى من هذا الكتاب. ونكتفي بالمقدمة التي شرحت للحصول على هذه الدالة. ونترك تفاصيل إيجاد تحويلات شوارتز ـ كريستوفل للأمثلة التالية: وسنترك تطبيقات هذا التحويل للبند القادم.

مثال (١٩):

أوجد تحويل شوارتز ـ كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي إلى المنطقة الداخلية للمثلث المتساوي الأضلاع الذي رؤوسه $-2, 2, 2i\sqrt{3}$.



الشكل (١٣)

الحل:

من كون المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الخارجية هي $2\pi/3$ لذلك فإن $\theta_k = 2\pi/3\ ,\ k = 1, 2, 3$. ولتسهيل العمليات الحسابية نختار قيماً مناسبة للمتغير x مثلاً $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ فتكون $-2 = f(-1), 2 = f(1), 2i\sqrt{3} = f(\infty)$ حتى يكون الترتيب موجباً (عكس عقارب الساعة) وعليه فإن العلاقة (39) تبين أن الدالة هي:

$$f(z) = A\int_0^z (s - x_1)^{-\theta_1/\pi}(s - x_2)^{-\theta_2/\pi}ds + B$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$f(z) = A\int_0^z (s+1)^{-2/3}(s-1)^{-2/3}ds + B$$

وحتى نجد الثابتين A, B نستخدم الشروط الحدية وهي: $f(-1) = -2,\ f(1) = 2$ لنحصل على ما يلي:

$$-2 = f(-1) = A\int_0^{-1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\,ds + B$$

$$2 = f(1) = A\int_0^{1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\,ds + B$$

ولإكمال الحل ننوه إلى ضرورة الاستفادة من جداول التكامل في التفاضل والتكامل ما أمكن، أو نترك أمر إيجاد مثل هذه التكاملات للتفاضل والتكامل توفيراً للوقت. فإذا فرضنا أن:

$$\beta = \int_0^{1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\,ds \;,\; \alpha = \int_0^{-1} \frac{1}{(s^2-1)^{2/3}}\,ds$$

فإن الثوابت تأخذ القيم التالية:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{\alpha-\beta} \;,\; B = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ \beta & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$$

مثال (٢٠):

أوجد تحويل شوارتز .كريستوفل الذي ينقل النصف العلوي للمستوي المركب $\text{Im. } z > 0$ إلى نصف الشريحة اللانهائية R حيث:

$$R = \{w: |\text{Re. } w| < 1 \,,\, \text{Im. } w > 0\}$$

الحل:

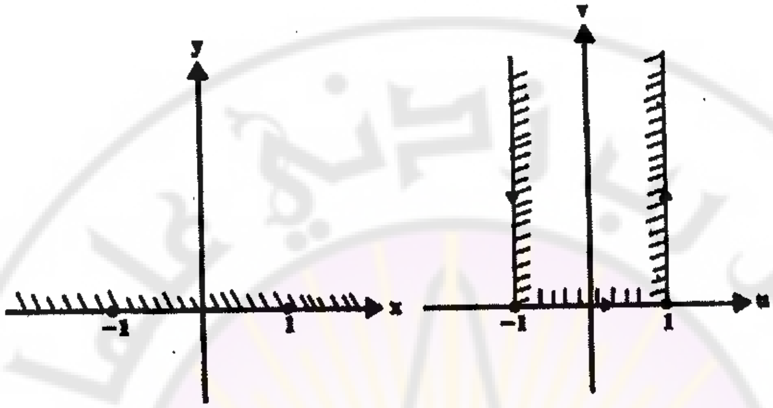
حدود هذه الشريحة كما تبدو في الشكل (١٤).

لاحظ أن الزوايا الخارجية للمضلع المكون لأضلاع الشريحة R هي $\theta = \pi/2$ وأن $w_1 = -1, w_2 = 1$.

وباختيار القيم $x_1 = -1 \,,\, x_2 = 1$ فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z)=A\int_{0}^{z}(s+1)^{-1/2}(s-1)^{-1/2}ds+B$$

$$=A\int_{0}^{z}\frac{1}{\sqrt{s^2-1}}ds+B$$



الشكل (١٤)

ولإيجاد قيم الثوابت A, B نستفيد من الشروط الحدية وهي $w_1=f(x_1),\ w_2=f(x_2)$ وعليه فإن:

$$-1=f(-1)=A\int_{0}^{-1}\frac{1}{i\sqrt{s^2-1}}ds+B\ ;1=f(1)=A\int_{0}^{1}\frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}ds+B$$

وبإيجاد قيمة التكامل:

$$\frac{1}{i}\int_{0}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds=\frac{-1}{i}\sin^{-1}s\Big|_{-1}^{0}$$

$$=-i\sin^{-1}(-1),$$

$$=i\sin^{-1}(1),$$

$$\frac{1}{i}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds=\frac{1}{i}\sin^{-1}s\Big|_{-1}^{0}$$

$$=-i\sin^{-1}(1).$$

ومن ذلك فإن:

$$-1 = A\,(i \sin^{-1} 1) + B\,,$$
$$1 = A\,(-i \sin^{-1} 1) + B\,,$$

وهذا يعني أن:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\sin^{-1}1 & 1 \\ -i\sin^{-1}1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2i}{\pi} \quad , \quad B = \frac{\begin{vmatrix} i\sin^{-1}1 & -1 \\ -\sin^{-1}1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i\sin^{-1}1 & 1 \\ -i\sin^{-1}1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

وبذلك فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z) = \frac{2i}{\pi}\int_0^z \frac{1}{i\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

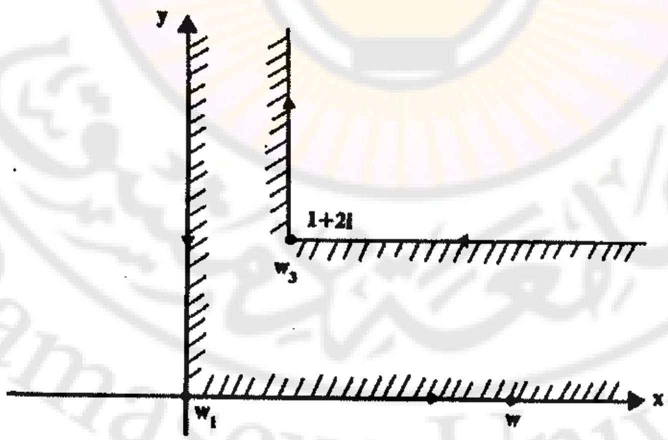
أي إن:

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1} z$$

ننهي هذا البند بالمثال التالي:

مثال (٢١):

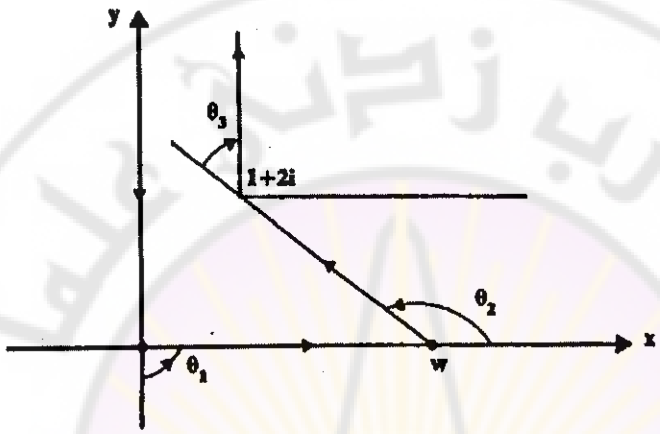
أوجد تحويل شوارتز .كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي إلى النفق الظاهر في الشكل (١٥).



الشكل (١٥)

الحل:

واضح أن النقاط التي تمثل زوايا المضلع هامة، وفي الشكل (١٥) ظاهر لنا زاويتان لذلك نفرض أن الزاوية الأخرى هي ∞ وقبل ذلك نفرض نقطة w على المحور **u** تمثل الزاوية الثالثة لكي يكتمل المضلع المطلوب كما هو واضح في الشكل (١٦).



الشكل (١٦)

فتكون الزوايا الخارجية للمضلع هي على الترتيب $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ حيث إن $\theta_1 = \pi/2$ وإذا تركنا w تقترب من الرمز ∞ فإن الزاوية θ_2 تقترب من π وبما أن اتجاه السهم للزاوية θ_3 مع عقارب الساعة فهي إذن سالبة وعندما تقترب w من ∞ فإن θ_3 مع عقارب الساعة فهي إذن سالبة وعندما تقترب w من ∞ فإن θ_3 تقترب من $(-\pi/2)$ وعليه فإن الزوايا هي على الترتيب $\pi/2, \pi, -\pi/2$ وإذا اخترنا النقاط $-1, 0, 1$ فإن الدالة المطلوبة هي:

$$f(z) = A\int_0^z (s+1)^{-\pi/2\pi}(s-0)^{-\pi/\pi}(s-1)^{\pi/2\pi}ds + B$$

حيث إن:

$$f(1) = 1 + 2i \ , \ f(-1) = 0 \ , \ f(0) = \infty$$

ولذلك فإن:

$$f(z) = A\int_0^z (s+1)^{-1/2} s^{-1} (s-1)^{1/2} ds + B$$

ولإيجاد الثوابت A ,B نجد قيمة التكامل عند الشروط الحدية، ولإيجاد التكامل فإن:

$$\int_0^z \frac{\sqrt{s-1}}{s\sqrt{s+1}} ds = \int_0^z \frac{s-1}{s\sqrt{s^{-1}-1}} ds$$

$$= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{s^2-1}} ds - \int_0^z \frac{1}{s\sqrt{s^2-1}} ds$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds - \sec^{-1} s$$

$$= (-1\sin^{-1} s - \sec^{-1} s)\Big|_0^z$$

$$= - i \sin^{-1} z - \sec^{-1} z + \pi/2$$

وعند الشروط الحدية فإن:

$$0 = f(-1) = A\int_0^{-1} \frac{s-1}{s\sqrt{s^2-1}} ds + B \quad ;$$

ومن ثمَّ فإن:

$$0 = A(i\sin^{-1} 1 - \sec^{-1}(-1) + \frac{\pi}{2}) + B$$

$$= A\left(\frac{\pi}{2} i - \frac{\pi}{2}\right) + B \ ,$$

$$= \frac{\pi}{2}(i-1)A + B$$

وكذلك:

$$1 + 2i = f(1) = A\,(-i \sin^{-1} 1 - \sec^{-1} 1 + \frac{\pi}{2}) + B \ ,$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)\,A + B$$

وعليه فإن:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\pi}\left(\frac{1+2i}{-1+i}\right)$$

وكذلك:

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1+2i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}(i-1) & 1 \\ \frac{\pi}{2}(1-i) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}(1+2i)$$

ولذلك فإن التحويل المطلوب هو الدالة:

$$f(z) = \frac{-1}{\pi}\left(\frac{1+2i}{-1+i}\right)\left\{-i\sin^{-1}z - \sec^{-1}z + \frac{\pi}{2}\right\} + \frac{1}{2}(1+2i)$$

$$= \frac{3i-1}{2\pi}\left(-i\sin^{-1}z - \sec^{-1}z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}(1+2i)$$

٣ . ٥ . تطبيقات فيزيائية وهندسية:

نتناول في هذا البند أنواعاً مختلفة من تطبيقات الدوال المطابقة والتحليلية، وسيكون تناولنا وصفياً وليس تحليلياً لكثرة التطبيقات وتمشياً مع الهدف الذي وضع من أجله

الكتاب وهو كونه كتاباً رياضياً. ويستطيع القارئ المهتم بالتعمق في موضوع التطبيقات الرجوع إلى العديد من المراجع التي تعالج الموضوع بالتفصيل والمذكور في قائمة المراجع في آخر الكتاب. لذلك سنذكر نوع التطبيق ومثالاً عليه موضحاً بالرسوم ما أمكن وسنفترض أن الشروط الفيزيائية المثالية معتمدة في جميع الحالات وهي التي تحقق الشروط الحدية أو الشروط الابتدائية دون أية تفصيلات لذلك.

أ . درجة الحرارة الثابتة (Steady State Temperature):

إذا فرض أن درجة الحرارة لصفيحة تعتمد على الموضع في الصفيحة ولا تعتمد على الزمن فإن الدالة $T(x, y)$ التي تصف التوزيع الحراري في الصفيحة التي تحقق الشروط الحدودية دالة توافقية أي إنها تحقق معادلة لابلاس:

$$\nabla^2 T(x, y) = 0$$

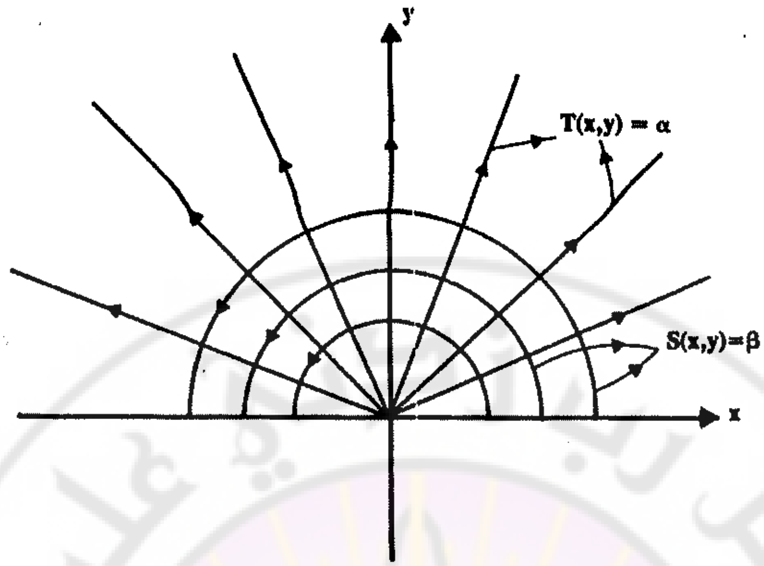
ومن ثمَّ فإنه يوجد دالة تحليلية $f(z)$ بحيث إن: $Re.\ f = T(x, y)$

وعليه فإنه يمكن أن تفسر بأنه لأيّ دالة تحليلية f فإن $Re.\ f$ يمثل دالة التوزيع الحراري الثابت. لنفرض أن المرافق التوافقي للدالة $T(x, y)$ وهو $Im.f = S(x, y)$ فإذا فرضنا أن: $\alpha = T(x, y) =$ مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوي التي تمثلها هذه الدالة تسمى (Isothermal) خطوط تساوي الحرارة. وكذلك إذا فرضنا أن: $\beta = S(x, y) =$ مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوي التي تمثلها هذه الدالة تسمى خطوط تدفق الحرارة heat flow lines.

ومن المعروف أن منحنيات المستوي لأي دالة توافقية ومنحنيات المستوي لدالة المرافق التوافقي لها تتقاطع متعامدة.

مثال (٢٢):

من المعلوم في كتاب التحليل العقدي (١) أن أحد فروع $\log z$ تحليلية في النصف العلوي للمستوي وأن منحنيات المستويات تمثل بالشكل (١٧).



الشكل (١٧)

ب . الحقل الكهربائي:

من المعروف أن الحقل الكهربائي $F(x, y)$ (والذي يمكن أن يعرف بأنه القوة المؤثرة في وحدة الشحنة الموجبة عند النقطة (x, y)) محافظ أي إنه يوجد دالة الجهد الكهربائي $\phi(x,y)$ بحيث إن $F(x, y) = - \nabla \phi (x, y)$ ومن ثمّ فإن $\phi(x, y)$ توافقية ويوجد لها مرافق توافقي مثل $S(x, y)$ لنحصل على الدالة التحليلية $f(z) = \phi + Si$. أن منحنيات المستويات $\phi (x, y) = \alpha$ حيث α مقدار ثابت تسمى خطوط تساوي الجهد وكذلك منحنيات المستوي $S(x, y) = \beta$ (حيث β مقدار ثابت) تسمى خطوط التدفق.

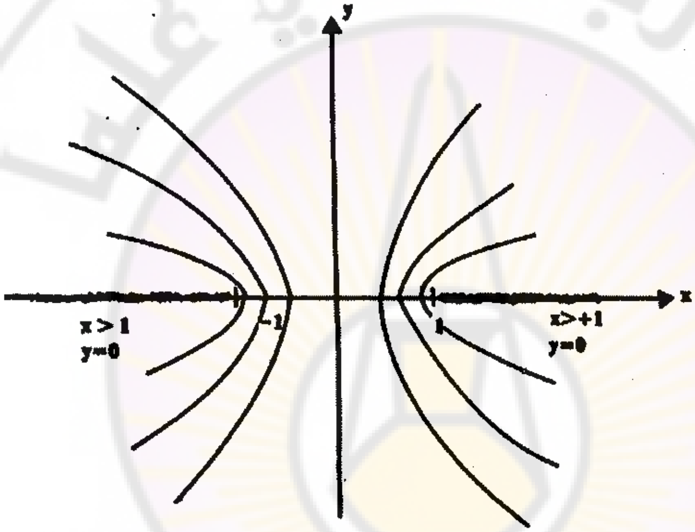
مثال (٢٣):

من دراستنا السابقة للدوال المطابقة يمكن أن نستنتج أن الدالة $f(z) = \sin^{-1}z$ تنقل المستوي المركب باستثناء الشعاعين $|x| > 1 \ , \ y = 0$ إلى الشريحة العمودية

$-\dfrac{\pi}{2} < Re.w < \dfrac{\pi}{2}$ ومن ثمَّ للحصول على دالة الجهد الكهربائي التي تحقق شروطاً حدية نأخذ الجزء الحقيقي للدالة المطابقة f وهي:

$$\phi(x, y) = A\ Re.\ \sin^{-1}z$$

حيث إن A ثابت توجد قيمته اعتماداً على الشروط الحدية، فإذا فرضنا أن $\phi(x, y) = A\ Re.\ \sin^{-1}z = \alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن منحنيات المستوي التي تمثل هذه الدالة التي تعرف باسم خطوط تساوي الجهد تمثل الشكل (١٨).



الشكل (١٨)

ج. تدفق السوائل:

إذا فرضنا أن لدينا سائلاً يتدفق على المستوي المركب فإن سرعة تدفق هذا السائل عند النقطة $z = x + yi$ هي: $F(x, y) = P(x, y) + i\ Q\ (x, y)$.

يهمنا هنا السائل الذي يحقق الشرطين: الأول أنه متساوي الاستمرار (equicontinuity). والذي يتحقق إذا كان: $\nabla\ .\ F = P_x + i\ Q_x = 0$

والشرط الثاني هو غير دوراني (Irrotational) والذي يتحقق إذا كان:

$$\nabla \times F = 0$$

ومن ذلك تكون $Q_x - P_y = 0$

ومن هذه الشروط يمكن أن نستنتج أن الدالة: $f(z) = P + Qi$ تحليلية. فإذا فرضنا أن الدالة $h(z)$ هي أصل المشتقة للدالة f فإن:

$$h(z) = \phi(x, y) + S(x, y)i$$

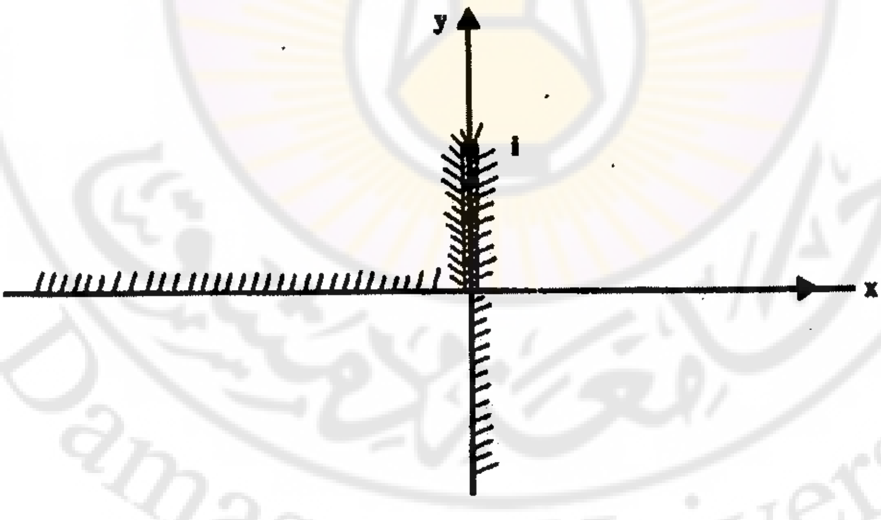
ويمكن إثبات أن $\phi(x, y)$ تمثل دالة الجهد لتدفق السائل التي تحقق $\nabla\phi = F(x, y)$ ومن ثمَّ فإن $\alpha = \phi(x, y) =$ مقداراً ثابتاً يعطي خطوط تساوي الجهد وكذلك $\beta = S(x, y) =$ مقداراً ثابتاً يعطي خطوط التيار للسائل.

مثال (٢٤):

يمكن إثبات أن الدالة المطابقة:

$$f(z) = -\frac{1}{2} i z^{1/2}(z-3)$$

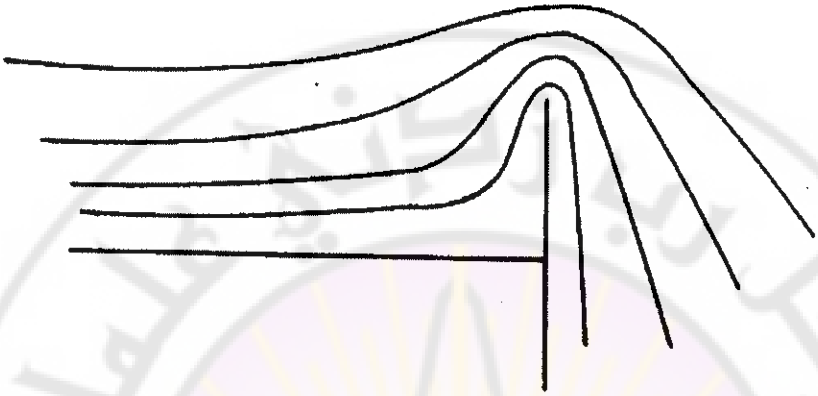
تنقل المستوي z إلى الشكل (١٩).



الشكل (١٩)

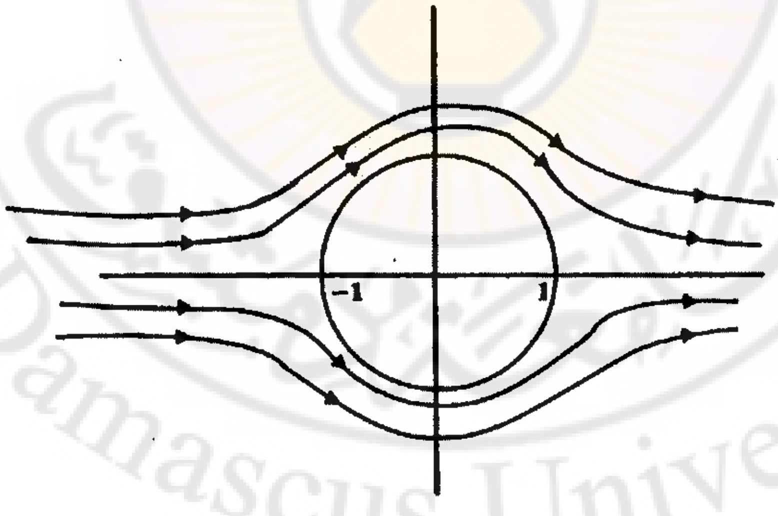
فتكون منحنيات المستوي للدالة: $\phi (x, y) = A \text{ Re. } f(z)$

(والتي يمكن إيجادها بالطرق المعروفة حيث إن A ثابت توجد قيمته اعتماداً على الشروط الحدية) تمثل خطوط تدفق سائل يواجه سداً كما في الشكل (٢٠).



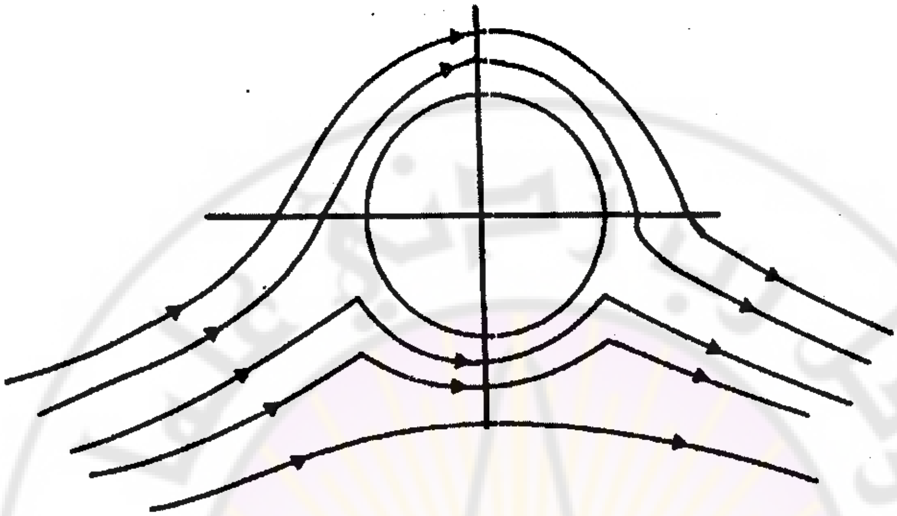
الشكل (٢٠): تدفق سائل يواجه سداً

والشكل يكون ممتعاً حقاً إذا تخيلنا أن ما يعيق حركة السائل جسم كروي مثلاً دائرة بدلاً من سد، فإذا فرضنا أن اتجاه التدفق باتجاه المحور الحقيقي الموجب، وعليه تكون خطوط التدفق كما في الشكل (٢١).



الشكل (٢١)

أما إذا كان اتجاه تدفق السائل يميل بزاوية α على المحور الحقيقي فإن شكل خطوط التدفق تأخذ الأشكال الآتية:

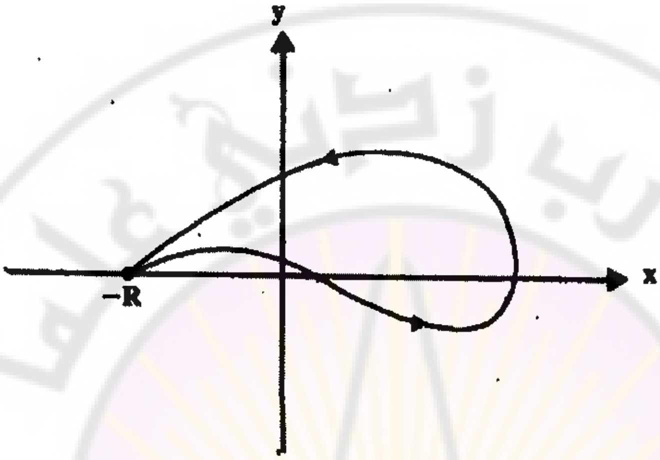


الشكل (٢٢)

الشكل (٢٣)

وفي جميع هذه الحالات يمكن أن توجد معادلات للدوال التوافقية التي تمثل مثل خطوط التدفق هذه.

واعتماداً على نظرية تطبيق ريمان فإنه يمكن إيجاد دالة تحليلية مطابقة تنقل قرص الوحدة أعلاه إلى الشكل الذي يحده كانتور مغلق وبسيط وموجب الاتجاه مثل الشكل (٢٤).



الشكل (٢٤)

إن مثل هذا الشكل قد يمثله نموذج جناح طائرة فتكون خطوط التدفق ممثلة لمقاومة الهواء مثلاً الشكل (٢٥).

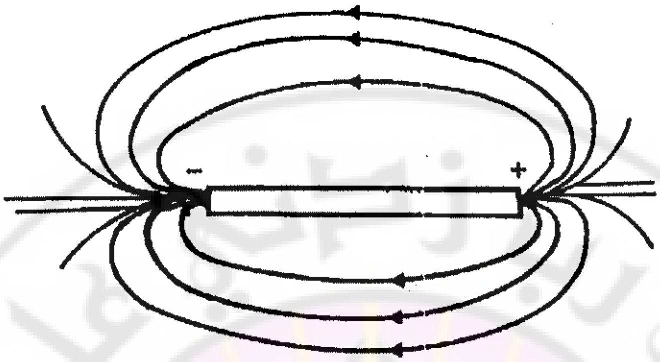
الشكل (٢٥)

وقد استطاع العالم Joakowski أن يدرس ذلك التطبيق وأثبت أنه يأخذ الشكل:

$$f(z) = z + \frac{R^2}{z}$$

د. النبع والمصب:

من المعروف أن الحقل المغناطيسي يأخذ الشكل الآتي:



الشكل (٢٦)

ويتميز بنقطة انطلاق وهي القطب الموجب ونقطة لقاء وهي القطب السالب. إن النقطة التي تنطلق منها الأشعة تسمى نبعاً والنقطة التي تلتقي فيها الأشعة تسمى مصباً ومن ثمَّ فإن حقل المجال المغناطيسي له نقطة نبع ونقطة مصب.

وكذلك يمكن أن يتكون أثناء حركة سائل ضمن شروط فيزيائية نموذجية (الشروط الحدية) نقطة التقاء وهي مصب أو نقطة انطلاق وهي نبع.

مثال (٢٥):

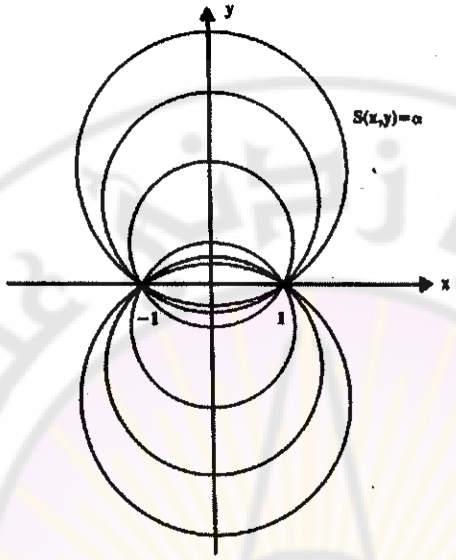
يمكن إثبات أن الدالة $f(z)$ حيث إن:

$$f(z) = \log \frac{z-1}{z+1}$$

دالة مطابقة عند النقاط z باستثناء النقطتين 1 ,-1 وبدراسة دالة الجهد وهي $\phi(x, y) = Re.\ f$ وكذلك دالة التيار $S(x, y) = Im.\ f$ يمكن التعرف على أن النقطتين تمثلان نبعاً ومصباً حيث إن:

$$S(x,y) = Im.f = \arg \frac{z-1}{z+1}$$

وبفرض أن $S(x, y) = \alpha$ = مقداراً ثابتاً فإن خطوط التيار عبارة عن دوائر مركزها على المحور التخيلي وجميعها تمر بالنقطتين 1+ ,1- كما في الشكل (٢٧).



الشكل (٢٧)

مثال (٢٦):

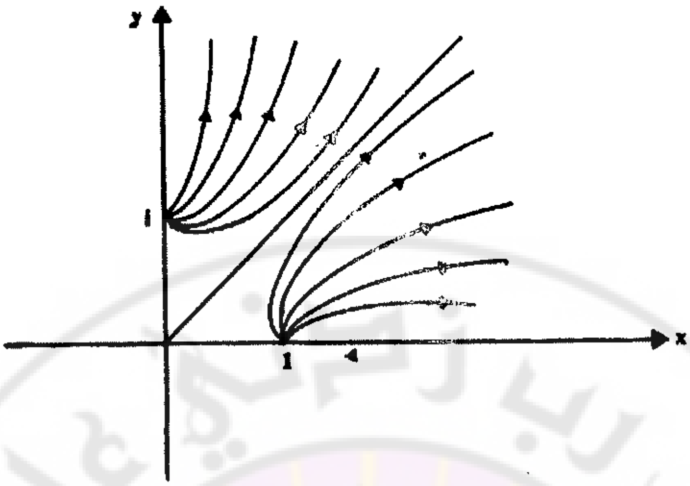
يمكن إثبات أن الدالة التحليلية:

$$f(z) = \log (z^4 - 1)$$

مطابقة عند جميع النقاط z ما عدا النقطتين i,1 (لأن الدالة غير معرفة عندهما) وهما تمثلان نبعين، وذلك بدراسة خطوط التيار التي تحدد بإيجاد الجزء التخيلي من الدالة وتثبيت قيمته أي إن:

$$S(x, y) = \text{Im. } f = \arg (z^4 - 1) = \alpha$$

حيث α مقدار ثابت وبرسم هذه الدالة نحصل على الشكل (٢٨).



الشكل (٢٨)

٣ . ٦ . تمارين غير محلولة:

١ . بفرض أن f ,g تحليليتان على المجال D بحيث إن $g(z) = f(z)$ لكل z في جوار (مفتوح) في المجال D. بيّن أن $f(z) = g'(z)$ لكل z في D.

٢ . إذا كانت الدالة g استمراراً تحليلياً للدالة f من المجال D إلى المجال S فبرهن أن الدالة:

$$h(z) = \begin{cases} f(z), z \in D \\ g(z), z \in S \end{cases}$$

وحيدة القيمة على المجال $D \cup S$.

٣ . بيّن أن الاستمرار التحليلي لدالة ما f (إن وجد فإنه) واحد ووحيد.

اقتراح: استعن بالتمرين (١).

٤ . بفرض أن الدالة f تحليلية على المجال D وأن (z_n) متتالية من نقاط D تقاربية للنقطة z_0 في D كذلك فإذا كان $f(z_n) = 0$ لكل $n = 1, 2, \ldots$ فبرهن أن $f(z) = 0$ لكل z في D.

اقتراح: استعن ببرهان المبرهنة (١) بعد أن تبين أ، $f(z_0) = 0$ لكون الدالة مستمرة وأنها صفر غير معزول للدالة f.

٥ ـ بفرض أن f, g دالتان تحليليتان في المجال D بحيث إن $f(z_n) = g(z_n)$ لكل $n = 1, 2, \ldots$ حيث (z_n) متتالية من نقاط D تتقارب للنقطة z_0 في D فبرهن أن $f(z) = g(z)$ لكل z في D.

اقتراح: استعن بالتمرين السابق.

٦ . إذا كانت الدالة f معرفة بالمساواة:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$$

فبيّن أن قيمة الاستمرار التحليلي لها عند النقطة $z = -1$ على مسار يصل بين النقطة 1 و -1 ويقع في النصف العلوي للمستوي هو πi.

٧ . إذا كانت f تحليلية عند $z = 0$ وأن:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

أوجد قيمة $f(z)$.

٨ . برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي أن:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

٩ . برهن باستخدام فكرة الاستمرار التحليلي كذلك أن:

$$e^{-z} \cdot e^{z} = 1$$

١٠ . استعن بالتمرين (١) وبفكرة الاستمرار التحليلي على مسار لإثبات أن الدالة التحليلية على مجال D تحدد تماماً بقيمها على D أو بقيمها على مسار داخل D.

١١ . بيّن أن الدالة $g(z) = \frac{1}{z}$ استمرار تحليلي للدالة:

$$f(z) = i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{i}\right)^n$$

عند أي نقطة z في المستوي (عدا $z = 0$ بالطبع).

١٢ . بيّن أن الدالة f المعرفة بالمساواة:

$$g(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\arg z} \quad, |z| > 0 \,, \frac{\pi}{2} < \arg z < 2\pi$$

تمثل استمراراً تحليلياً للدالة f من النصف العلوي للمستوي إلى النصف السفلي منه مروراً بالجزء السالب من المحور الحقيقي حيث إن f معرفة بالمساواة:

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\arg z} \quad, |z| > 0 \,, 0 < \arg z < \pi$$

١٣ . بيّن أن الدالة $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ تمثل استمراراً تحليلياً للدالة:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

إلى جميع نقاط المستوي ما عدا $z = +i$, $z = -i$.

١٤ . بيّن كذلك أن الدالة $g(z) = \dfrac{1}{z^2}, z \neq 0$ تمثل استمراراً تحليلياً للدالة:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$$

إلى جميع نقاط المستوي ما عدا $z = 0$.

١٥ . بيّن أن الدوال التالية مطابقة:

أ . $f(z) = \sin z$

ب . $f(z) = e^{z^2}$

جـ . $f(z) = z^2 + z$

د . $f(z) = \cos 2z$

هـ . $f(z) = i z^2$

١٦ . أوجد صورة المربع R تحت الدالتين $f(z) = z^2$, $g(z) = iz^2$ حيث إن:

$$R = \{x + yi: 0 < x < 1 , 0 < y < 1\}$$

١٧ . صف صورة المجالات التالية تحت الدالة المطابقة $f(z) = e^z$

أ . $D = \{z: 0 < Im.\ z < \pi/2\}$

ب . المنطقة المثلثية المحددة بالمسارات: $y = 0, y = x, x = 2$

جـ . $D = \{z: Re\ z > 0\}$

د . $D = \{z = Re\ z > 0 , 0 < Im\ z < \pi/2\}$

١٨ . أوجد دالة عكسية موضعية للدالة $f(z) = z^2$ عند النقاط التالية:

أ . $z_0 = 1$ ب . $z_0 = i$

١٩ . بيّن أن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{z}$ مطابقة عند جميع النقاط عدا $z = 0$.

٢٠ . برهن المبرهنة (٥).

٢١ . بيّن أن الدالة $f(z) = z^2$ واحد – لواحد على المجال:

$$D = \{z \in C : Re.\ z > 0\}$$

ولكنها ليست واحداً. لواحد على أي مجال يحتوي D.

٢٢ ـ بفرض أن الدالة تحليلية وكذلك واحد – لواحد على مجال D وعرفنا الدالة h بالمساواة $h^2(z) = f(z)$ لكل z في D برهن أن h واحد – لواحد على D.

٢٣ . لتكن الدالة f تحليلية على المجال D حيث:

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

ونفرض أن $f(0) = 0$ وأن $|f(z)| < 1$ لكل z في D.

أ . برهن أن $|f(z)| < |z| < 1$ لكل z في D.

ب . إذا كانت $z_0 \neq 0$ بحيث إن $f(z_0) = z_0$ فبرهن أنه يوجد عدد مركب α بحيث إن:

$$f(z) = \alpha z \; ; \; |\alpha| = 1$$

اقتراح:

أ . من كون f لدالة تحليلية وأن $f(0) = 0$ بيّن أن $f(z)/z$ تحليلية كذلك ثم بيّن أن:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \max_{z\in C_r} \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r} \;,\; C_r\!: |z| = r < 1$$

ثم خذ النهاية عندما $r \to 1$ لتستنتج المطلوب.

ب . استعن بقانون القيمة المطلقة العظمى لإثبات أن:

$$\frac{f(z)}{z} = \alpha \;,\; |\alpha| = 1$$

α مقدار ثابت.

ملاحظة: الفرع أ من هذا التمرين يعرف بأنه نظرية شوارتز.

٢٤ . أكمل حل مثال (١٣) بأن تبيّن أن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{z}$ تنقل المعادلة:

$$\alpha\,(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

إلى المعادلة:

$$\delta(u^2 + v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha = 0$$

حيث إن: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أعداد حقيقية بحيث إن $\beta^2 - \gamma^2 > 4\,\alpha\,\delta$. لاحظ أن المعادلة الأولى تمثل دائرة إذا كانت $\alpha \neq 0$ ومستقيماً إذا كانت $\alpha = 0$. وعليه فإن المعادلة الثانية كذلك تمثل دائرة إذا كانت $\delta \neq 0$ وتمثل خطاً مستقيماً إذا كانت $\delta = 0$.

٢٥ . استفد من التمرين السابق لإثبات أن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{z}$ تنقل الخطوط المستقيمة الأفقية إلى دوائر مركزها تقع على المحور التخيلي وكذلك الخطوط المستقيمة الرأسية إلى دوائر مراكزها تقع على المحور الحقيقي.

اقتراح: الخط المستقيم الأفقي يوازي المحور الحقيقي x وتكون معادلته $y + \delta = 0$ حيث تكون α, β أصفاراً و $\gamma = 1$ وبالمثل يمكن معالجة الخط المستقيم الرأسي.

٢٦ . أوجد صورة ما يلي تحت الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$:

أ . $|z + 1| = 1$ ب . $|z - i| = 1$

ج . $\text{Im } z = 2$ د . $\text{Re } z = -1$

٢٧ . بيّن أن الدالة:

$$f(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$$

تنقل القرص $|z + 1| < 1$ إلى نصف المستوي العلوي $\text{Im. } w > 0$.

٢٨ . أوجد صورة الدائرة $|z - 1| = 1$ والمنطقة الداخلية لها تحت الدوال التالية:

أ . $f(z) = z - i$ ب . $f(z) = -iz$

ج . $f(z) = \frac{3z-4}{z-1}$ د . $f(z) = \frac{z-2}{z+1}$

٢٩ . أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل النقاط z_1, z_2, z_3 إلى w_1, w_2, w_3 على الترتيب فيما يلي:

أ . $0, i, -i$ إلى $-1, 1, 0$

ب . $0, 1, 2$ إلى $0, 1, \infty$

ج . $0, 1, \infty$ إلى $-i, \infty, 1$

د . $-1, i, 1$ إلى $-i, 0, i$

٣٠ . أوجد الدالة العكسية للدوال التي حصلت عليها في التمرين السابق.

٣١ . بين أن الدالة $f(z)=\dfrac{i+z}{i-z}$ تنقل قرص الوحدة إلى نصف المستوي الأيمن أي $Re.\ w > 0$.

٣٢ . أوجد دالة تنقل المنطقة الهلالية الواقعة داخل الدائرة $|z-2| = 2$ وخارج الدائرة $|z-1| = 1$ إلى شريحة أفقية.

٣٣ . أوجد دالة مزدوجة الخطية f تنقل قرص الوحدة $|z| < 1$ إلى نصف المستوي الأيمن $Re.w > 0$ بحيث إن $f(-i) = 0$.

٣٤ . أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل النصف السفلي للمستوي إلى القرص:

$$|z-1| < 1$$

٣٥ . بيّن أن الدالة $f(z) = e^z$ تنقل المنطقة المستطيلة R حيث:

$$R = \{z: \alpha < Re\ z < \beta, \gamma < Im.\ z < \delta\}$$

إلى المنطقة الحلقية S حيث إن:

$$S = \{r\, e^{\theta i} : e^{\alpha} < r < e^{\beta}, \gamma < \theta < \delta\}$$

٣٦ . بيّن أن الدالة:

$$f(z)=\frac{e^z-i}{e^z+i}$$

تنقل الشريحة R حيث: $R = \{z: 0 < Im.z < \pi\}$ إلى قرص الوحدة $|w| < 1$.

٣٧ . بيّن أن الدالة:

$$f(z)=\mathrm{Log}\frac{1+z}{1-z}$$

تنقل إلى قرص الواحدة $|z| < 1$ إلى الشريحة R حيث:

$$R=\left\{w:-\frac{\pi}{2}<Im.w<\frac{\pi}{2}\right\}$$

٣٨ . أوجد دالة تنقل المنطقة الهلالية المذكورة في التمرين (٣٢) إلى كل المستوي المركب.
اقتراح: استعن بتمرين (٣٢) وكون الدالة $f(z) = e^z$ تنقل شريحة أفقية إلى كل المستوي المركب.

٣٩ . بيّن أن الدالة مزدوجة الخطية f التي تثبت النقطتين 1 ,1- (أي $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$) هي:

$$f(z) = \frac{z+\alpha}{\alpha z+1}$$

حيث إن: $\alpha = T(0) \neq \infty$

٤٠ . أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل الدائرة $|z| = 1$ إلى الدائرة $|w - 1| = 1$.

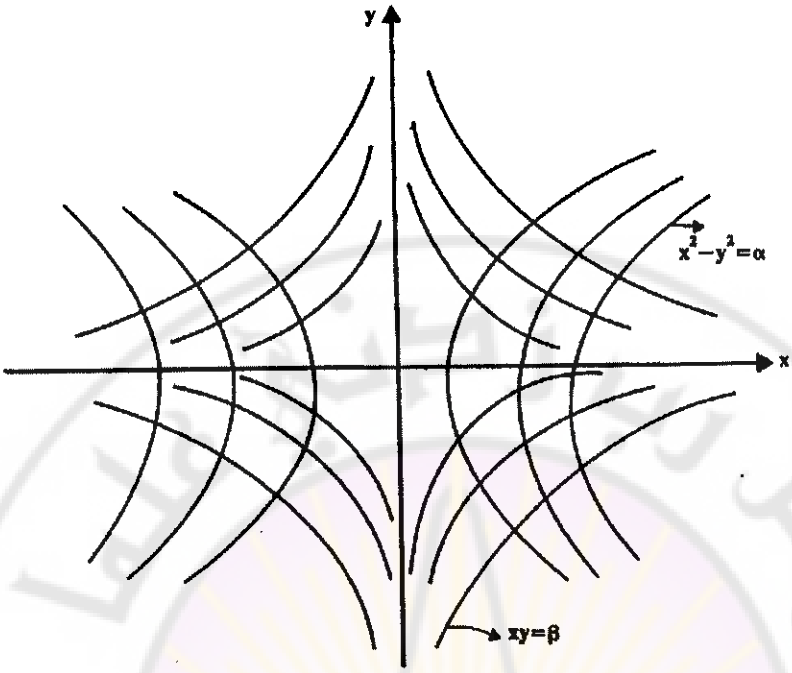
٤١ . أوجد دالة مزدوجة الخطية f تثبت النقطتين 0, 1 بحيث إن $f(-i) = \infty$.

٤٢ . أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل المحور الحقيقي x إلى نفسه والمحور التخيلي y إلى الدائرة $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

٤٣ . أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل المحور الحقيقي x إلى نفسه والمستقيم $y = x$ إلى الدائرة $|w + i| = \sqrt{2}$.

٤٤ . بيّن أن منحنيات المستوي للدالة $f(z) = z^2$ تتقاطع بزاوية متعامدة وهي عائلتان من القطع الزائد.

اقتراح: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ نفرض أن $x^2 - y^2 = \alpha$ تحصل على إحدى العائلات وبفرض أن $2xy = \beta$ تحصل على العائلة الثانية. كما يبين الشكل (٢٩).



الشكل (٢٩)

٤٥ . بيّن أن مستوي المنحني للدالة:

$$f(z) = \log \frac{z-1}{z+1}$$

عبارة عن عائلتين من الدوائر. إحداهما تمر دائماً من النقطتين 1 ,1-.

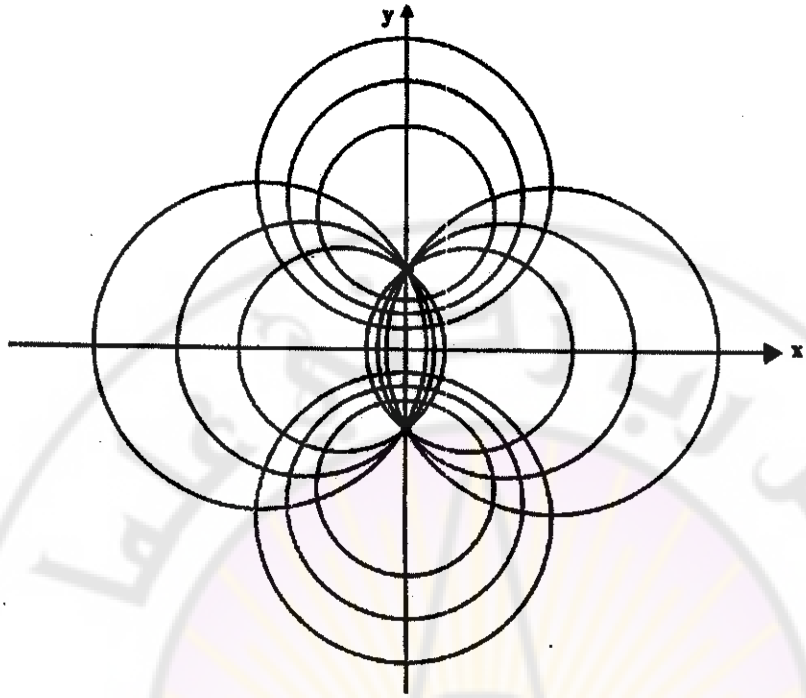
اقتراح: بفرض أن الجزء الحقيقي للدالة مقدار ثابت نحصل على الدوائر:

$|z-1| = \alpha\, |z+1|$, (α = ثابت)

وبفرض أن الجزء التخيلي Im.f مقدار ثابت نحصل على الدوائر:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \beta$$

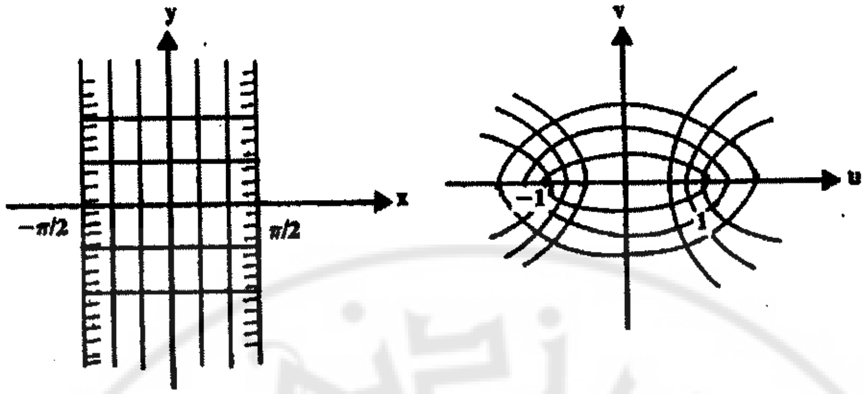
(β = مقدار ثابت). ولها الشكل (٣٠).



الشكل (٣٠)

٤٦ . بيّن أن الدالة $f(z) = \sin z$ دالة مطابقة وواحد لواحد وتنقل الشريحة الرأسية R حيث $R = \left\{ z : |\operatorname{Re}.z| < \frac{\pi}{2} \right\}$ إلى المستوي المركب باستثناء المستقيمين $u \le -1,\ v=0$ و $u \ge 1,\ v = 0$ وتنقل الخطوط المستقيمة الأفقية والرأسية في الشريحة R إلى قطوع ناقصة وأخرى زائدة. كما في الشكل (٣١).

٤٧ . بيّن أن الدالة مزدوجة الخطية يمكن اعتبارها تركيباً لعدة دوال مثل الإزاحة، الدوران، التكبير، المقلوب.



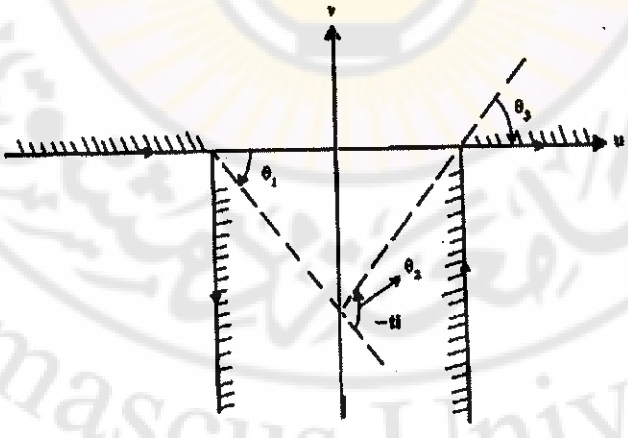
الشكل (٣١).

٤٨ . أوجد تحويل شوارتز . كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $Im.z > 0$ إلى الشريحة اللانهائية R حيث:

$$R = \{w: 0 < Im.\ w < 1\}$$

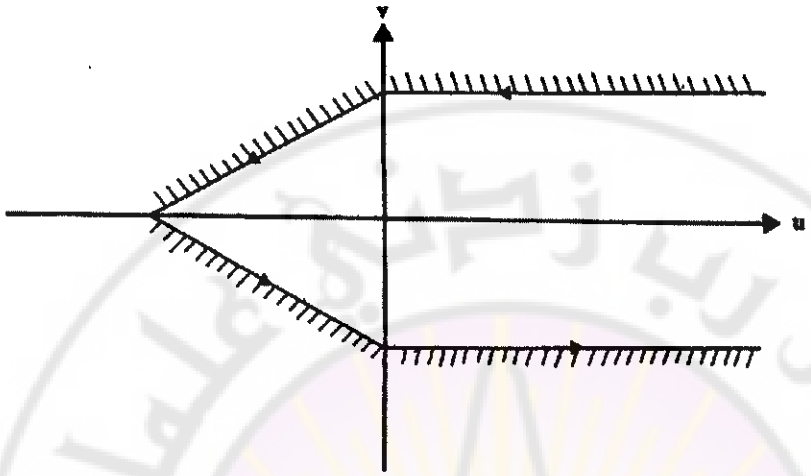
٤٩ . أوجد تحويل شوارتز . كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $Im.z > 0$ إلى الشكل (٣٢).

اقتراح: افرض الزاوية الثالثة عند $-ti$, $t > 0$. ثم خذ النهاية عندما $t \to \infty$ لإيجاد الزاوية الثالثة.



الشكل (٣٢)

٥٠ . أوجد تحويل شوارتز . كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $\text{Im.z} > 0$ إلى الشكل (٣٣).



الشكل (٣٣)

٥١ . أوجد تحويل شوارتز . كريستوفل الذي ينقل النصف العلوي من المستوي إلى المجال D حيث:

$$D = \left\{ w : |\operatorname{Re.w}| < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w < 0 \right\}$$

٥٢ . بيّن أن الدالة:

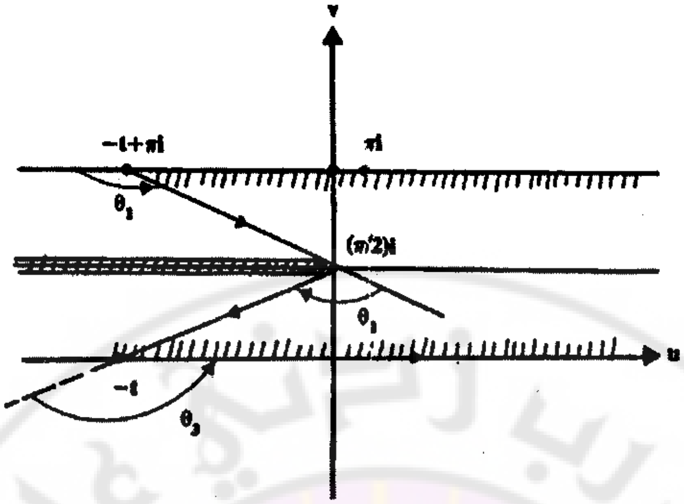
$$f(z) = \frac{1}{2}\log(z^2 - 1)$$

تنقل النصف العلوي من المستوي المركب $\text{Im.z} > 0$ إلى الشريحة:

$R = \{w : 0 < \text{Im.w} < \pi\}$ باستثناء الشعاع $u \leq 0, v = \dfrac{\pi}{2}$.

اقتراح: استعن بتحويل شوارتز . كريستوفل للشكل (٣٤).

لاحظ الرؤوس الثلاث: لتجد الزوايا لها، ثم اجعل t تقترب من ∞ لتحصل على المطلوب

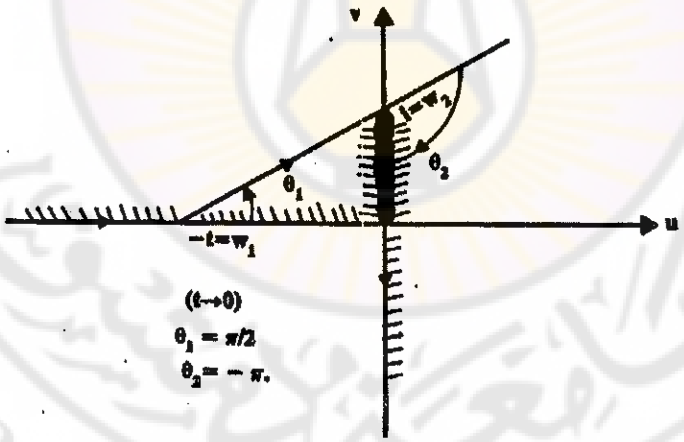


الشكل (٣٤)

٥٣ . بيّن أن الدالة:

$$f(z) = \frac{-1}{2} i z^{1/2}(z-3)$$

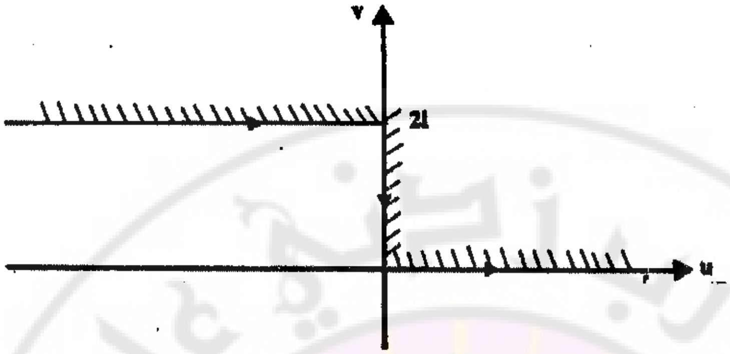
تنقل النصف العلوي للمستوي المركب $\mathrm{Im}.z > 0$ إلى القسم المظلل من الشكل (٣٥).



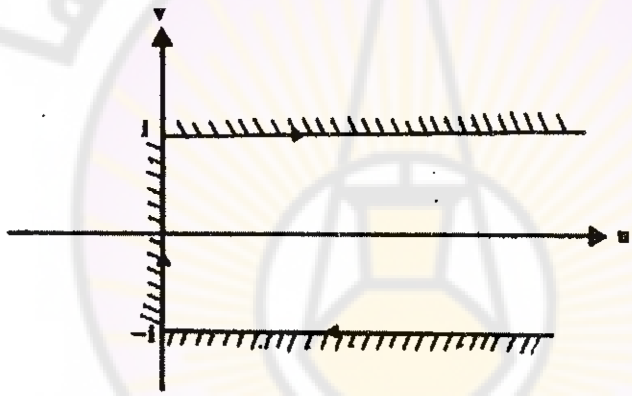
الشكل (٣٥)

اقتراح: أوجد تحويل شوارتز ـ كريستوفل للشكل.

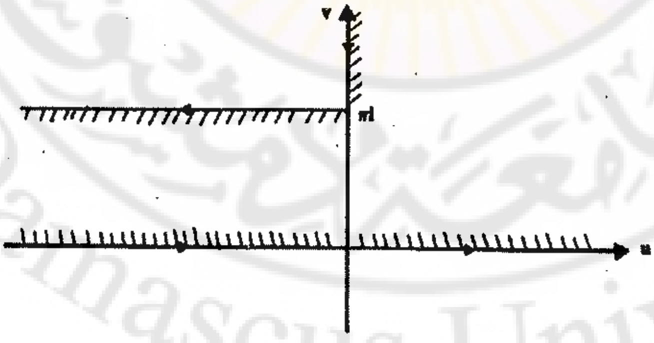
٥٤ . أوجد تحويل شوارتز . كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي $\text{Im.}z > 0$ إلى الأشكال (٣٦ . أ، ب، جـ، د).



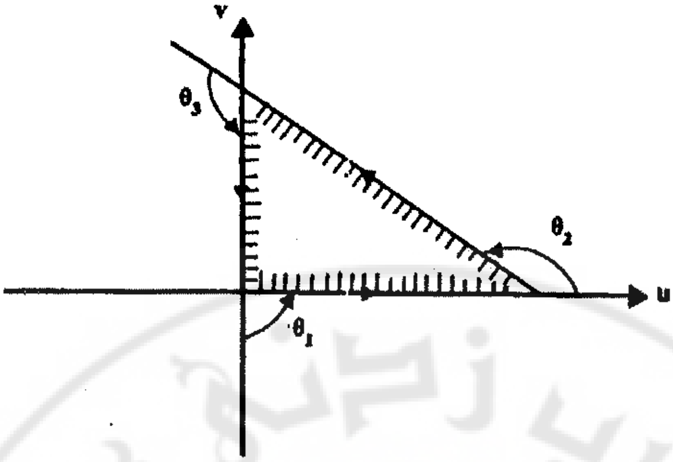
الشكل (٣٦ . أ)



الشكل (٣٦ . ب)

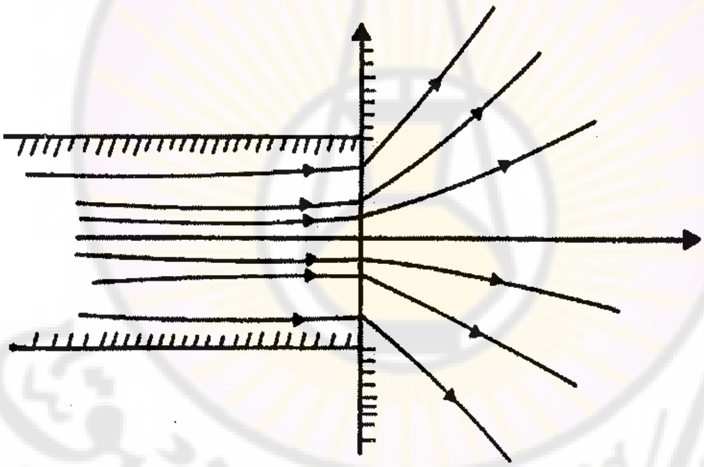


الشكل (٣٦ . جـ)



الشكل (٣٦ . د)

٥٥ . أوجد باستخدام شوارتز . كريستوفل الدالة المطابقة التي تكون خطوط التدفق للجزء الحقيقي لها الشكل (٣٧):

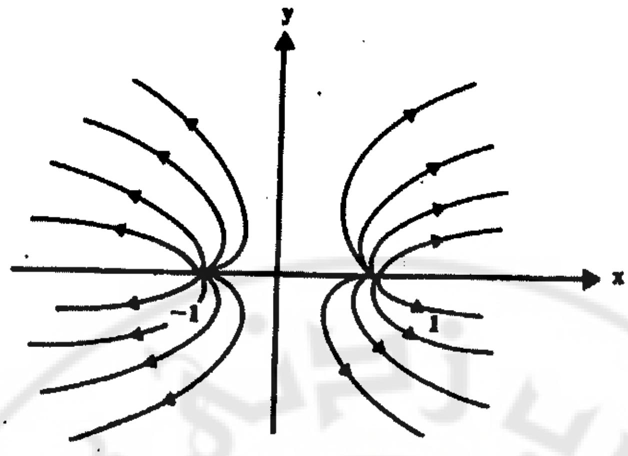


الشكل (٣٧)

٥٦ . بيّن أن الدالة: $f(z) = \log (z^2 - 1)$ التحليلية والمطابقة عند جميع النقاط باستثناء 1 ,1- وهاتان النقطتان تمثلان نبعين ويكون الشكل للدالة التوافقية:

$$S(x, y) = \text{Im. } f = \arg (z^2 - 1) = \alpha$$

كما يلي:



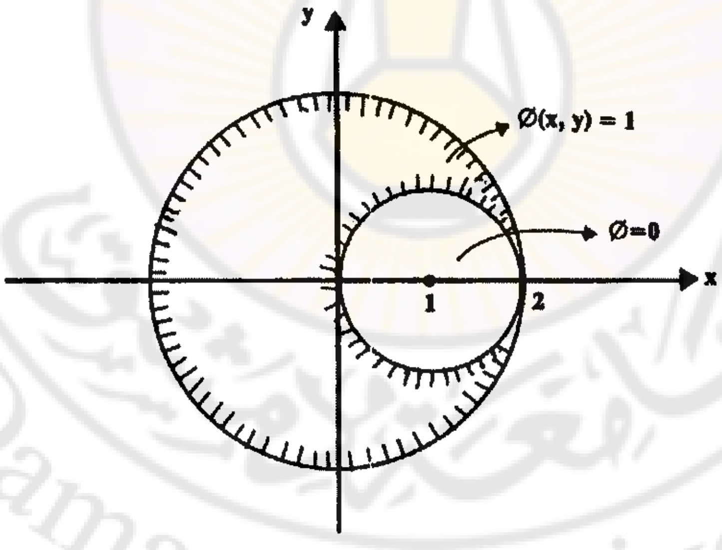
الشكل (٣٨)

٥٧ . إذا كانت دالة توزيع الجهد الكهربائي في المنطقة الهلالية معرفة بالمعادلة:

$$\phi(x, y) = A.\ \mathrm{Re}.\ f(z)$$

حيث A ثابت يعتمد على الشروط الحدية الموضحة في الشكل (٣٩).

أوجد $f(z)$ ثم أوجد $\phi(x, y)$.



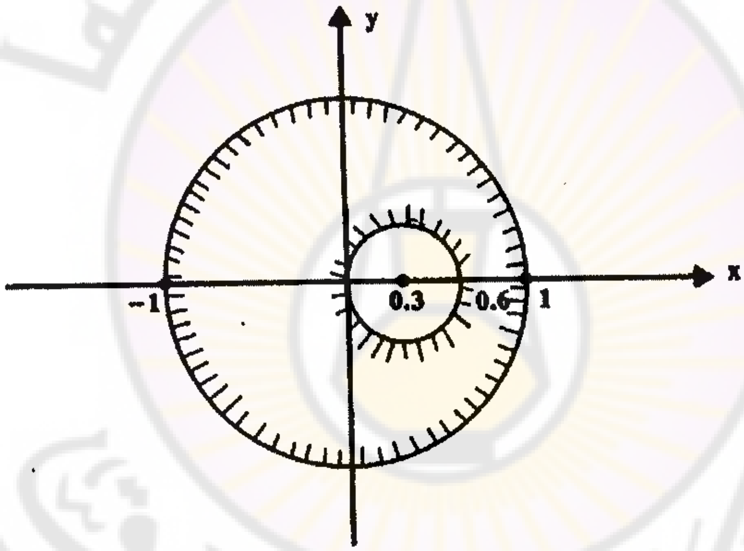
الشكل (٣٩)

اقتراح: أوجد دالة مزدوجة الخطية تنقل المنطقة الهلالية إلى شريحة مثلاً.

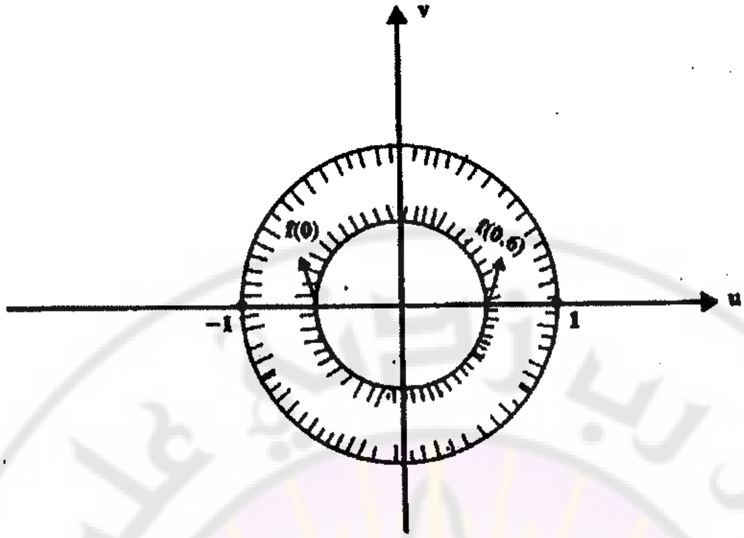
٥٨ . أوجد دالة توافقية $\phi(x, y)$ تنقل المنطقة المظللة في الشكل (٤٠ . أ) إلى المنطقة المظللة في الشكل (٤٠ . ب) وتحقق الشروط المذكورة على الشكل (٤٠).

اقتراح: تذكر أن الدالة: $f(z) = \dfrac{\lambda - z}{\bar{\lambda} z - 1}, \quad |\lambda| < 1$ تنقل قرص الوحدة إلى نفسه وبالاستفادة من الشروط: $f(0) = - f(0.6)$ يمكن إيجاد قيمة $\lambda = 3, \dfrac{1}{3}$ ومن ثمَّ تحدد $f(z)$ تماماً ثم أوجد $\phi(x, y)$ حيث:

$$\phi(x, y) = \mathrm{Re}.f(z) = \mathrm{Re}.\left(\frac{1 - 3z}{z - 3}\right)$$



الشكل (٤٠ . أ)



الشكل (٤٠ . ب)

الفصل الرابع

الجداءات غير المنتهية، التوابع الأولرية

Infinite Product and Eulerian Functions

٤ . ١ . الجداءات غير المنتهية:

٤ . ١ . ١ . تعريف (١):

لتكن لدينا متتالية من الأعداد العقدية u_k، ولننظر في الجداء:

$$P_n = u_1 \,.\, u_2 \ldots u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k \qquad (1)$$

نرمز للمتتالية $\{P_n\}$ اختصاراً بـ $\prod_{1}^{\infty} u_k$ وندعوها جداءً غير منتهٍ.

ونقول عن الجداء غير المنتهي:

$$\prod_{1}^{\infty} u_k = u_1 \cdot u_2 \ldots . u_k \ldots \qquad (2)$$

إنه متقارب إذا كانت مضاريبه، بغض النظر عن عدد منته من المضاريب، لا تساوي الصفر (أي إذا استطعنا أن نجد عدداً مثل m بحيث يكون $u_k \neq 0$ عندما يكون $k > m$) وإذا وجدت النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} u_{m+1} \cdot u_{m+2} \ldots u_n$$

وكانت مختلفة عن الصفر. لنرمز لهذه النهاية بـ P. عندئذ نسمي العدد:

$$U = u_1 \,.\, u_2 \ldots u_m \,.\, P$$

قيمة الجداء (2).

ونقول عن الجداء إنه متقارب إلى الصفر إذا كان واحد على الأقل من مضاريبه معدوماً، وإذا كان عدد مضاريبه المعدومة منتهياً، وسعى الجداء الجزئي (1) بعد حذف المضاريب المعدومة إلى نهاية مختلفة عن الصفر.

يتضح من ذلك أن الشرط اللازم والكافي كي يتقارب جداء غير منتهٍ إلى الصفر هو أن يكون أحد مضاريبه معدوماً.

أما إذا لم يكن الجداء (2) متقارباً فهو متباعد. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $P = 0$ نقول عن الجداء إنه متباعد إلى الصفر.

٤ . ١ . ٢ . مبرهنة (١):

إذا كان $\prod u_n$ متقارباً فإن المضروب العام u_n يسعى إلى الواحد عندما تسعى n إلى اللانهاية.

البرهان:

لنلاحظ أن:

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية نرى أن $u_n \to 1$ وهو المطلوب.

لقد جرت العادة أن نرمز لـ u_n بـ $c_n + 1$ وعندئذ يبدو الشرط اللازم السابق $c_n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

لنلاحظ أن الشرط المذكور ليس شرطاً كافياً فإذا نظرنا مثلاً في الجداء $\prod(1+\frac{1}{n})$ نرى أن $\frac{1}{n} \to 0$ عندما $n \to \infty$ ولكن $P_n = n + 1$، ومن ثمَّ فإن متتالية الجداءات الجزئية تسعى إلى اللانهاية مع n.

٤ . ١ . ٣ . مبرهنة (٢):

إذا لم يكن أحد مضاريب الجداء:

$$\prod_{1}^{\infty}(1+c_k) \qquad (3)$$

فـإن الشـرط الـلازم والكـافي لتقـارب هـذا الجـداء هـو أن تتقـارب المتسلسـلة $\sum_{1}^{\infty} Lg(1+c_k)$.

البرهان:

لنكتب:

$$S_n = \sum_{1}^{n} Lg(1+c_k)$$

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+c_k)$$

عندئذ يكون $P_n = e^{S_n}$. ولكن بما أن التابع الأسي مستمر فغن $P_n \rightarrow e^s$ عندما $S_n \rightarrow s$ فالشرط كافٍ.

لزوم الشرط: من الواضح أن:

$$S_n = Lg\, P_n + 2q_n \pi i$$

حيث q_n عدد صحيح. وبما أن القيمة الرئيسية للوغاريتم جداء ليست بالضرورة مجموع القيم الرئيسية للوغاريتمات المضاريب فإنه ليس من الضروري أن يكون q_n معدوماً.

لنفرض α_n القيمة الرئيسية لزاوية $(1 + c_n)$ و β_n القيمة الرئيسية لزاوية P_n. فإذا كان الجداء متقارباً فإن $\alpha_n \rightarrow 0$ و $\beta_n \rightarrow \beta$ عندما $n \rightarrow \infty$. ولكن حيث إن:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_n + 2q_n \pi$$

فإن:

$$2\,(q_{n+1} - q_n)\,\pi = \alpha_{n+1} - (\beta_{n+1} - \beta_n) \to 0$$

عندما $n \to \infty$. وبما أن q_n عدد صحيح فإن هذا يعني أن $q_n = q$ من أجل قيم n الكبيرة بقدر كافٍ. وعلى هذا إذا سعى P_n إلى نهاية P غير مساوية للصفر عندما $n \to \infty$ فإنه ينتج أن:

$$S_n \to \mathrm{Lg}\,P + 2q\pi i$$

وهو المطلوب.

٤ . ١ . ٤ . التقارب المطلق:

نقول عن جداء $\prod (1 + c_n)$ إنه متقارب بالإطلاق إذا كانت المتسلسلة $\sum \mathrm{Lg}(1 + c_n)$ متقاربة بالإطلاق.

ومن الواضح أن الجداء المتقارب بالإطلاق هو جداء متقارب، وأن قيمة الجداء لا يتغير إذا غيرنا ترتيب مضاريبه.

إن الشرط اللازم والكافي للتقارب بالإطلاق للجداء $\prod (1 + c_n)$ هو التقارب بالإطلاق للمتسلسلة $\sum c_n$.

البرهان:

بما أن $c_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ سواء كان الجداء متقارباً أو كانت المتسلسلة متقاربة فإنه يوجد عدد N بحيث يكون $|c_n| \leq \frac{1}{2}$ عندما $n \geq N$، ومن ثمَّ فإن:

$$\left|1 - \frac{\mathrm{Lg}(1 + c_n)}{c_n}\right| = \left|\frac{c_n}{2} - \frac{c_n^2}{3} + \frac{c_n^3}{4} - \right| \leq \frac{1}{2}\left\{|c_n| + |c_n|^2 + ..\right\} \leq \frac{1}{2}$$

إذن:

$$\frac{1}{2}|c_n| \leq |\mathrm{Lg}(1 + c_n)| \leq \frac{2}{3}|c_n|$$

ومن هذه المتراجحة الأخيرة يتبين بوضوح أن المتسلسلة $\sum Lg(1+c_n)$ متقاربة بالإطلاق إذا (وإذا فقط) كانت المتسلسلة $\sum |c_n|$ متقاربة بالإطلاق وهو المطلوب.

٤ . ١ . ٥ . أمثلة محلولة:

(١) إن: $\prod_{n=1}^{\infty} e^{i^n/n^2}$ متقارب بالإطلاق لأن المتسلسلة:

$$\sum_1^{\infty}\left|Lge^{i^n/n^2}\right| = \sum_1^{\infty}\left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

متقاربة.

(٢) إن المتسلسلة $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق ولذلك فإن الجداء $\prod_2^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ متقارب على الإطلاق.

(٣) بين أنه إذا لم يكن z عدداً صحيحاً سالباً فإن النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^z}{(z+1)(z+2)...(z+2-1)}$$

موجودة.

لنشكل جداء غير منتهٍ تكون فيه العبارة:

$$P_n = \frac{(n-1)!n^z}{(z+1)(z+2)...(z+n-1)}$$

جداء جزئياً، ثم نبرهن أن الجداء غير المنتهي متقارب، الأمر الذي ينتج عنه أن $\lim_{n\to\infty} P_n$ موجودة.

لنكتب:

$$P_{n+1} = \frac{n!(n+1)^z}{(z+1)...(z+n)}$$

$$= \frac{n!}{(z+1)\dots(z+n)} \cdot \frac{3^z}{2^z} \cdot \frac{(n+1)^z}{n^z} \cdot \frac{2^z}{1^z}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{z+k} \cdot \frac{(k+1)^z}{k^z} \right] = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{z} \right]$$

لننظر الآن في الجداء:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{z} \right] \qquad (4)$$

بما أن:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{z} - 1 \right] = \lim_{\beta\to 0} \frac{(1+z\beta)^{-1}(1+\beta)^z - 1}{\beta^2} = \frac{1}{2} z(z-1)$$

نستنتج من ذلك أن الجداء (4) متقارب بالإطلاق لأن $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة بالإطلاق وهو المطلوب.

٤ . ١ . ٦ . التقارب المنتظم لجداء غير منته:

لتكن $\{c_k(z)\}$ متتالية من التوابع العقدية معرفة في منطقة مغلقة محدودة D، وبحيث يكون الجداء $\prod (1 + c_k(z))$ متقارباً في كل موضع من D. فإذا كانت متتالية الجداءات الجزئية:

$$f_n(z) = \prod_{1}^{n} \{1 + c_k(z)\}$$

متقاربة بانتظام في D، فإننا نقول عن الجداء غير المنتهي إنه متقارب بانتظام في D.

٤ . ١ . ٧ . مبرهنة (٣):

إذا وجدت أعداد موجبة M_k بحيث يكون $|c_k(z)| < M_k$ مهما كانت k ومهما كانت z في D، وبحيث تكون المتسلسلة $\sum_1^{\infty} M_k$ متقاربة فإن الجداء $\prod\{1+c_k(z)\}$ متقارب بالإطلاق وبانتظام في D.

البرهان:

بما أن $\sum_1^{\infty} M_k$ متقاربة بالإطلاق (لأنها متقاربة وذات حدود موجبة) فإن الجداء المفروض متقارب بالإطلاق.

لبرهان التقارب المنتظم ننظر في $P_n = \prod_1^n (1+M_k)$. بما أن $\sum M_k$ متقاربة فإن P_n يسعى إلى نهاية معينة عندما $n \to \infty$.

وإذا كان $n > m$ فإن:

$$|f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z)| \prod_{m+1}^{n} (1 + c_k(z)) - 1|$$
$$= \sum c_k(z) + \sum c_k(z) c_s(z) + \sum c_k(z) c_s(z) c_r(z) + \ldots$$

والقيمة المطلقة للطرف الأيمن لا تزيد على:

$$\sum M_k + \sum M_k \cdot M_s + \sum M_k M_s M_r + \ldots = \prod_{m+1}^{n} (1 + M_k) - 1$$

وعلى هذا يكون:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq P_n - P_m$$

ولما كانت P_n تسعى إلى نهاية معينة فإنه إذا كان ε عدداً موجباً مفروضاً فإنه يمكن اختيار m بحيث يكون:

$$0 < P_n - P_m < \varepsilon$$

عندما $n > m$ وبالتالي فإن:

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

مهما كانت z في D. وبما أن m تتعلق بـ ε فقط فإن متتالية التوابع $\{f_n(z)\}$ متقاربة بانتظام وهو المطلوب.

وأخيراً إذا لاحظنا أنه إذا كانت متتالية من التوابع التحليلية في منطقة D متقاربة بانتظام على كل منطقة مغلقة جزئية من D، فإن نهاية هذه المتتالية تمثل تابعاً تحليلياً في D (يتم برهان هذه الخاصة بالاعتماد على نظرية موريرا وعلى كون كل محيط مثلث هو مجموعة مغلقة) ومن ثمّ فإننا نستنتج ما يلي:

إذا كان الجداء $\prod (1 + c_k(z))$ متقارباً بانتظام إلى $f(z)$ في كل منطقة مغلقة داخل طريق مغلق C، وإذا كان كل مضروب في الجداء تابعاً تحليلياً داخل C فإن $f(z)$ تحليلي هناك.

٤ . ١ . ٨ . مثال محلول:

ناقش تقارب الجداء:

$$\left(1-\frac{z}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^3}{z^2}\right) \qquad (5)$$

في منطقة مغلقة محدود D لا تنتمي لها أي من النقاط $\pm1, \pm2, \ldots$.

بما أن D محدودة فإنه يوجد عدد R بحيث يكون $|z| \le R$ مهما كانت z في D.

وبما أن $\left|\frac{z^2}{n^2}\right| \le \frac{R^2}{n^2}$ و $\sum \frac{R^2}{n^2}$ متقاربة فإن الجداء (5) متقاربة بانتظام وبالإطلاق في D. وإذا كانت $F(z)$ قيمة الجداء فإن F تحليلي في D.

٤ . ٢ . تمثيل تابع صحيح متسامٍ نجداء غير منته:

ليكن f تابعاً صحيحاً ليست نقطة الأصل موضعاً صفرياً له. لنفرض أن لهذا التابع عدداً غير منتهٍ من الأصفار البسيطة $a_1, a_2, \ldots$ وأن هذه الأصفار مرتبة على النحو:

$$|a_1| < |a_2| < \ldots$$

نلاحظ، استناداً إلى خصائص أصفار تابع تحليلي، أن $|a_n| \to \infty$ عندما $n \to \infty$.

وإذا كتبنا $f(z) = (z - z_k)\ \varphi(z)$ فإننا نرى أن φ تحليلي وليس له موضع صفري في جوار معين لـ a_k. ومن ثمَّ فإن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

وعلى هذا فإن النقاط الشاذة الوحيدة لـ $\frac{f'}{f}$ هي أقطاب بسيطة براسب يساوي الواحد في الموضع a_k.

لنفرض أن $\frac{f'}{f}$ يحقق الشروط الآتية:

(١) f تابع مير و مورفي في منطقة منتهية من المستوي العقدي (أي في كل منطقة لا تنتمي لها نقطة اللانهاية).

(٢) توجد متتالية متزايدة من الأعداد الموجبة R_n تنتهي إلى اللانهاية عندما $n \to \infty$ وبحيث لا تمر أي من الدوائر C_n المعطاة بالمعادلة $|z| = R_n$ في أي قطب للتابع f مهما كانت n.

(٣) إن الحد الأعلى لـ $|f(z)|$ على C_n محدود بحد ذاته عندما $n \to \infty$.

(٤) أن يسعى $|f(R_n e^{i\theta})|$، عندما $n \to \infty$ إلى الصفر بانتظام لـ θ في $0 \le \theta \le 2\pi$، أو، بوجه أعم، في كل جزء من هذا المجال لا يحوي أياً من عدد منتهٍ من قيم مستثناة لـ θ ينتج عندئذ أن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \qquad (6)$$

وتكون هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام في كل منطقة مغلقة ومحدودة ولا ينتمي لها أي من أصفار f (شرط أن تجمع الحدود في (6) بشكل مناسب ووفق ما رأينا في الشرط الأول السابق. وبمكاملة (6) حداً حداً نجد:

$$\lg f(z) = \lg f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$f(z) = f(0) \prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n})$$

إن هذا الجداء متقارب بانتظام في كل منطقة مغلقة محدودة لا تحوي أي صفر من أصفار f.

أما إذا لم يحقق f'/f سوى الشروط (١) و (٢) و (٣) من الشروط الواردة أعلاه فإنه ينتج:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n}\right)$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\log f(z) = \log f(0) + \frac{f'(0)}{f(0)} z + \sum_{1}^{\infty} \left(\lg\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n}\right)$$

وبإزالة اللوغارتم نجد:

$$f(z) = f(0) e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}\right)$$

٤ . ٢ . ١ . مثال محلول:

برهن أن:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

لننظر في التابع الصحيح:

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\prod z)^{2n}}{(2n+1)!}$$

إن هذا التابع يساوي $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ إذا كان $z \neq 0$، ويساوي الواحد عندما $z = 0$.

إن أصفار هذا التابع هي $\pm 1, \pm 2, \ldots$. ثم إن المشتق اللوغاريتمي لهذا التابع هو:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\pi \operatorname{ctg} \pi z-\frac{1}{z}$$

يحقق جميع الشروط (١) و (٢) و (٣) و (٤) الواردة أعلاه إذن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\lim_{m \to \infty}\sum_{1}^{m}\left[\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right]=\sum_{1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

وبالمكاملة نجد:

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

ليلاحظ أنه لا يمكننا أن نكتب:

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}{}^{`}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

(حيث وضعنا الفتحة على رمز الجداء لنشير إلى أن المضروب الموافق لـ $n = 0$ محذوف) لأن هذا الجداء متباعد. هذا من جهة، ومن جهة ثانية، فإننا نجد:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{1}^{m}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

إن كلاً من هاتين المتسلسلتين متقاربة بانتظام وبالإطلاق في أية منطقة مغلقة ومحدودة لا ينتمي لها أي من أصفار f. وبالمكاملة نجد:

$$f = \prod_{1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right\}\prod_{1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right]$$

إن الجداء الأخير متقارب إطلاقاً.

٤ . ٢ . ٢ . ملاحظة هامة:

لتكن G منطقة ولتكن $\{a_j\}$ متتالية من النقاط المختلفة في G دون أن تكون لها نقطة تجمع في g. ولتكن $\{m_j\}$ متتالية من الأعداد الصحيحة. عندئذ يوجد تابع تحليلي f معرف على G، أصفاره هي النقاط a_j بمراتب هي m_j.

٤ . ٣ . مبرهنة (٤) (وايرشتراس):

مهما تكن متتالية الأعداد المركبة $\{a_n\} \in C$، التي تسعى إلى اللانهاية: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$، يوجد تابع صحيح $f(z)$ ينعدم فقط في النقاط a_n، وتكون مرتبة الصفر a_n مساوية لعدد الحدود في المتتالية المساوية لـ a_n.

البرهان:

دون أن نحد من عمومية المسألة، يمكننا اعتبار $a_n \neq 0$ (لأنه بدلاً من التابع $f(z)$ يمكن أخذ التابع الصحيح $f(z)/z^m$ حيث m مرتبة صفر التابع $f(z)$ في النقطة $z = 0$) وأن a_n مرتبة تبعاً لتزايد طويلاتها. لقد وجدنا أن تقارب الجداء اللانهائي ذي العوامل $\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ مكافئ لتقارب سلسلة لوغاريتمات تلك العوامل:

$$\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=-\frac{z}{a_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2-\ldots-\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k-\ldots$$

إلا أن هذه السلسلة، في الحالة العامة، يمكن أن تتباعد بنتيجة تناهي a_n إلى اللانهاية بسرعة ليست كافية. من الطبيعي، وبغية تحقيق التقارب في السلسلة المذكورة، أن نقوم بحذف الحدود الأولى منها وذات القوى الصغيرة لـ $(1/a_n)$ وبكلام آخر سنأخذ بدلاً من $\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ التابع:

$$\ln g_n(z)=\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2-\ldots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}=$$

$$=-\sum_{k=P_n+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k \qquad (7)$$

حيث P_n أعداد طبيعية مختارة بحيث يتحقق التقارب المذكور. ولنتابع هذه الفكرة في شكلها العام. بغية ذلك نثبت عدداً q $(0 < q < 1)$ ونرمز بـ k_n لـ $\{|z| \le q\,|a_n|\}$ وليكن الفرع المختار لـ $\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ من أجل $z \in k_n$ هو الفرع الرئيسي (الذي من أجله $\ln 1 = 0$) ومن ثمَّ يكون التابع $\ln g_n(z)$ في العلاقة (7) معرفاً ومن أجل تلك النقاط z يكون لدينا:

$$|\ln g_n(z)| \le \left|\frac{z}{a_n}\right|^{P_n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{P_k+k+1} \le \frac{1}{1-q}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{P_n+1} \qquad (8)$$

(استخدمنا المتراجحة: $1 \le P_k + k + 1$ وجمعنا السلسلة الهندسية). لنختر الآن الأعداد P_n بحيث تتقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n+1} \qquad (9)$$

إطلاقاً وبانتظام في أية دائرة $\{|z| \le R\}$. بغية ذلك يكفي أن نضع، على سبيل المثال، $P_n + 1 = n$ (انظر معيار كوشي مع اعتبار أن $a_n \to \infty$). ومن أجل أية مجموعة متراصة K يمكن إيجاد عدد N بحيث تكون $k \subset k_n$ من أجل جميع الأعداد $n \le N$. عندئذٍ وكما هو واضح من (8) تتقارب السلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} \ln g_n(z)$ إطلاقاً وبانتظام على k وهذا يعني تقارب الجداء:

$$\prod_{n=N}^{\infty} g_n(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{P_n}\right)^{P_n}} = f_N(z)$$

من الواضح أن التابع:

$$f_N(z) = e^{\sum_{n=N}^{\infty} \ln g_n(z)}$$

وحيد التعيين وتحليلي في k كما أنه لا يؤول إلى الصفر. تبعاً لذلك يكون الجداء اللانهائي.

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}} \qquad (10)$$

والمختلف عن $f_N(z)$ بعدد منته من العوامل متقارباً على k كما يكون التابع $f(z)$ هناك وحيد التعيين وتحليلياً وينعدم فقط في تلك النقاط a_n المنتمية إلى k. وبما أن k مجموعة متراصة ما فإن $f(z)$ يكون تابعاً صحيحاً أصفاره هي a_n.

٤ . ٣ . ١ . نتيجة:

يمكن نشر أي تابع صحيح $f(z)$ في جداء لا نهائي بدلالة أصفاره:

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\left(\frac{z}{a_n}\right)+\dots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}} \qquad (11)$$

حيث m مرتبة صفر التابع f في النقطة $z = 0$, $g(z)$ تابع صحيح ما وأما الأعداد P_n فمختارة بحيث تكون السلسلة (9) متقاربة إطلاقاً وبانتظام على أية مجموعة متراصة k.

البرهان:

سنعتبر أن $m = 0$ (من أجل ذلك يكفي أخذ التابع $f(z)/z^m$ بدلاً من $f(z)$) ونرتب أصفار التابع $f(z)$ وفق تزايد طويلاتها مع تكرار كل صفر بقدر مرتبته وبدلالة هذه الأصفار ووفقاً لمبرهنة وايرشتراس (٤ . ٣) لنشكل التابع:

$$f_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\dots+\frac{1}{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{P_n}}$$

من الواضح أن النسبة $f(z)/f_0(z)$ تشكل تابعاً صحيحاً، وأن هذا التابع لا يساوي الصفر ومن ثمّ فإن التابع $g(z)=\ln\frac{f(z)}{f_0(z)}$ قابل للتمديد في C واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي يكون تابعاً صحيحاً ونجد أن $f(z) = e^{g(z)}f_0(z)$.

مثال (١):

التابع $\sin z/z$. لهذا التابع أصفار في النقاط $a_n = n\pi \; (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ وبما أن السلسلة $\sum (z/n)^2$ متقاربة بانتظام على أية مجموعة متراصة فيمكننا أن نضع $P_n = 1$ ويكون نشر وايرشتراس من الشكل:

$$\frac{\sin z}{z} = e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty} {}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/(n\pi)}$$

حيث $g(z)$ تابع صحيح ما، وأما الفتحة فوق إشارة الجداء فإنها تعني ترك الحد الموافق لـ $n = 0$. وأبسط الطرق في إيجاد التابع $g(z)$ تتلخص في مكاملة نشر التابع $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ المعروف لدينا سابقاً، وبذلك نجد أن $g(z) = 0$ وتبعاً لذلك يكون:

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} {}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/(n\pi)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad (12)$$

مثال (٢):

التابع الصحيح $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ له أصفار في النقاط $a_n = a^2\pi^2 \; (n = 1, 2, \ldots)$.

ومن الواضح أنه يمكننا أن نضع $P_n = 0$ وتبعاً لذلك يكون نشر وايرشتراس من الشكل:

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right)$$

وأما $g(z) \equiv 0$. ومن الأسهل استبدال z بـ $\sqrt{z}$ في الطرف الأيمن من (12) ويكون:

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2\pi^2}\right) \qquad (13)$$

٤ . ٤ . التوابع الأولرية:

٤ . ٤ . ١ . التابع غاما $\Gamma(z)$:

يعتبر التابع $\Gamma(z)$ أبسط التوابع الميرومورفية وأكثرها أهمية وبواسطتها يعمم مفهوم العاملي $n!$ على الأعداد المركبة z. ولأسباب تاريخية عرف هذا التابع من قبل العالم أولر بحيث تنتج القيمة $n!$ من أجل $z = n + 1$ أي إن $\Gamma(n+1) = n!$ ومن ثمّ فإن العلاقة المميزة $n . (n-1)! = n!$ تكتب من أجل التابع غاما على الشكل:

$$n\,\Gamma(n) = \Gamma\,(n+1)$$

وبالإضافة إلى ذلك ينبغي أن يكون لدينا $\Gamma(1) = 0! = 1$. لندرس بناء هذا التابع، ولنشترط قبل كل شيء أن يحقق العلاقة $z\,\Gamma(z) = \Gamma\,(z+1)$ من أجل جميع القيم المركبة لـ z. سننطلق في تعريف التابع غاما من المعادلة التابعية:

$$zf(z) = f(z+1)\ ,\ f(1) = 1 \qquad (1)$$

إلا أنه من ناحية ثانية لا يكفي هذا الشرط لتعريف التابع بشكل كامل. ففي الحقيقة إذا كان $f_0(z)$ تابعاً ميرومورفياً ما ومن أجله:

$$z\,f_0(z) = f_0\,(z+1)\ ,\ f_0(1) = 1$$

فإنه من أجل النسبة:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{f_0(z)}$$

$$\varphi(z) = \varphi\,(z+1)\ ,\ \varphi(1) = 1$$

أي إن $\varphi(z)$ تابع ميرومورفي ودوره 1 ويأخذ القيمة 1 في النقطة $z = 1$. وبأخذ أي تابع من هذا الشكل يمكننا تمثيل أي تابع $f(z)$ من التوابع المحققة للعلاقة (1) على الشكل:

$$f(z) = \varphi\,(z)\,f_0(z)$$

وبتطبيق العلاقة (1) من أجل $z\,,\ z+1\,,\ \ldots\,,\ (z+n-1)$ حيث n عدد طبيعي وبضرب العلاقات الناتجة نجد:

$$z\,(z+1)\ldots(z+n-1)\,f(z)=f(z+n) \qquad (2)$$

ومنه، ومن أجل $z = 1$ نجد:

$$f(n+1)=n! \qquad (3)$$

أي إنه في النقاط $z = 2, 3, \ldots, n+1$ .... تتطابق قيم $f(z)$ مع القيم $1!,2!,\ldots,n!$ (وهذا الأمر محقق من أجل $z = 1$ وذلك لأن $f(1) = 1 = 0!$). بجعل z في العلاقة (2) تنتهي إلى $-m = -(n-1)$ و $(m = 0,1,2,\ldots)$ نجد:

$$\lim_{z\to -m}(z+m)f(z)=\frac{f(1)}{(-1)^m m!}=\frac{(-1)^m}{m!} \qquad (4)$$

ومن ثمّ يكون للتابع $f(z)$ أقطاب بسيطة في جميع النقاط $z = -m$ مع $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ ورواسبه في تلك النقاط هي $(-1)^m/m!$. لنخضع التابع $f(z)$ إلى شرط إضافي:

(5) للتابع $f(z)$ لا توجد أقطاب مغايرة لـ $z = -m$ $m = 0, 1,2,\ldots$ كما أنه لا توجد له أصفار.

إذا حقق تابع ما $f_0(z)$ الشرطين (1) و (5) فإن التابع $\mathrm{tg}\,(i+2\pi z)/\mathrm{tg}\,i$، على سبيل المثال، يحقق الشرط (1) إلا أنه لا يحقق الشرط (5) نتيجة لوجود مجموعة لا نهائية من الأصفار والأقطاب التخيلية. إلا أنه إلى جانب التابع $f_0(z)$ والشرطين (1) و (5) تحقق جميع التوابع من الشكل $\varphi(z)f_0(z)$ هذين الشرطين حيث $\varphi(z)$ تابع صحيح دوري ودوره 1 ويأخذ القيمة 1 في النقطة $z = 0$ ولا ينعدم في أي مكان.

وهكذا وبالرغم من إضافة الشرط (5) في بناء التابع غاما يبقى هناك (نقص) معلوم إلا أنه باستخدام الشرط (1) يمكننا تأكيد أن التابع:

$$F(z)=\frac{1}{f(z)} \qquad (6)$$

هو تابع صحيح له أصفار بسيطة في النقاط $z=-m$ و $(m=0,1,\dots)$ كما أنه لا توجد أصفار أخرى له ومن ثمَّ يمكن تمثيله على الشكل:

$$F(z)=e^{g(z)}z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m} \qquad (7)$$

حيث $g(z)$ تابع صحيح ما (اخترنا هنا $P_n=1$ لأن السلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{z}{m^2}$ متقاربة بانتظام على أية مجموعة متراصة). من ثمَّ إن كل تابع ميرومورفي ومحقق للشرطين (1) و (5) من الشكل:

$$f(z)=e^{-g(z)}\frac{1}{z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-z/m}} \qquad (8)$$

من الواضح أن هذا التابع يحقق الشرط (5) من أجل أي اختيار للتابع الصحيح f(z) ولتحقيق الشرط (1) نضع العلاقة (8) على الشكل:

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-g(z)}}{z\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-z/m}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{-g(z)+\sum_{1}^{n}\frac{z}{m}}}{z(z+1)\dots(z+n)} \qquad (9)$$

وبغية الاختصار نضع:

$$\frac{n!e^{-g(z)+\sum_{1}^{n}\frac{z}{m}}}{z(z+1)\dots(z+n)}=f_n(z)$$

ونجد:

$$\frac{zf(z)}{f(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{zf_n(z)}{f_n(z+1)} = \lim_{z\to\infty}(z+n+1)e^{\left[-g(z)+g(z+1)-\left(\sum_1^n \frac{1}{m}-\sum_{14}^n \frac{1}{m}\right)\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)e^{\left[-g(z)+g(z+1)-\left(\sum_1^n \frac{1}{m}-\ln n\right)\right]} =$$

$$= e^{[-g(z)+g(z+1)-C]}$$

حيث: $$\ldots C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{1}{m} - \ln n\right) = 0.5772$$

ثابت أولر. تبعاً لذلك نجد أن الشرط (1) يتحقق إذا اخترنا التابع الصحيح $g(z)$ بحيث يكون:

$$g(z+1) - g(z) = C + 2k\pi i \quad , \quad (\text{عدد صحيح } k)$$

وبالإضافة إلى ذلك، إن الشرط $f(1) = 1$ يعطينا:

$$1 = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\left[-g(1)+\sum_1^n \frac{z}{m}-\ln n\right]}}{1+\frac{1}{n}} = e^{-g(1)+C}$$

ومن ثمَّ فإن:

$$g(1) = C + 2l\pi i \quad , \quad (\text{عدد صحيح } l)$$

إن أبسط التوابع الصحيحة المحققة للشرط الناتج هو التابع الخطي:

$$g_0(z) = C\,z$$

وبهذا الاختيار للتابع $g(z)$ نكون قد عرفنا التابع غاما تماماً. لنرمز لهذا التابع بـ $\Gamma(z)$ ونجد أن العلاقة (8) تأخذ الشكل:

$$\Gamma(z) = e^{-Cz}\frac{1}{z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}} \qquad (9`)$$

ومن أجل التابع الصحيح $1/\Gamma(z)$ نجد:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m} \qquad (10)$$

من العلاقة (10) تنتج العلاقة الهامة التي تربط التابعين $\Gamma(z)$ و $\sin\pi z$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right) =$$

$$= -\frac{z}{\pi}\cdot\left[\pi z \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2 z^2}{m^2\pi^2}\right)\right] = -\frac{z\sin\pi z}{\pi} \qquad (11)$$

أو:

$$\frac{1}{\Gamma(z)[-z\Gamma(-z)]} = \frac{\sin z}{\pi}$$

وبما أن: $-z\,\Gamma(-z) = \Gamma\,(1-z)$

فإنه يكون:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin\pi z}{\pi}$$

أو: $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \qquad (12)$$

ومنه نجد: $[\Gamma(1/2)]^2 = \pi$ وبما أن $0 < \Gamma(1/2)$ (استناداً إلى (`9)) فإنه يكون:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \qquad (13)$$

إن العلاقة (9) ومن أجل $g(z) = C\,z$ تعطينا التمثيل الآتي للتابع غاما:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{\left[\sum_{1}^{n}\frac{1}{m}-C\right]z}}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{\left[\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n-C\right)+\ln n\right]z}}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n-C\right)=0$$

و: $e^{z\ln n}=n^{z}$ فإن:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad (14)$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة غوص.

نأتي الآن إلى التمثيل التكاملي للتابع غاما. سنبرهن أولاً على أنه من أجل $Re.z > 0$ تتحقق العلاقة الآتية:

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (15)$$

حيث إن التكامل ممتد على طول القسم الموجب من المحور الحقيقي. إن التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (15) يعرف باسم تكامل أولر من النوع الثاني. لنستعرض التكامل:

$$F(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (16)$$

حيث إن t^{z-1} تعني $e^{(z-1)\ln t}$. وبما أن $|e^{-t}\ t^{z-1}| = e^{-t}\ t^{x-1}$ فإن التكامل يتقارب إطلاقاً من أجل جميع النقاط z المنتمية للساحة D حيث: $D = \{x = Re z > 0\}$.

ولنبرهن الآن العلاقة المساعدة الآتية:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}dt \qquad (17)$$

بإجراء التحويل $t = n\ \pi$ في التكامل:

$$F_n(z)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

نجد أن:

$$F_n(z)=n^z\int_0^1(1-\tau)^n t^{z-1}d\tau$$

وبالمكاملة بالتجزئة n مرة على التتالي نجد:

$$F_n(z)=\frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n-1)}\int_0^1\tau^{z+n-1}d\tau=\frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)}$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن العلاقة (17) تتطابق مع العلاقة (14) (من أجل $\text{Re}z > 0$) وهو ما يبرهن صحتها، وبذلك يبقى علينا أن نبرهن على أن:

$$F(z)=\lim_{n\to\infty}F_n(z)\quad,\quad z\in D$$

أو أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt=0\quad,\quad z\in D \tag{18}$$

وذلك لأن: $\left[F(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt\right]$ وبملاحظة أنه من أجل $|t| < n$ يكون:

$$1+\frac{t}{n}\le e^{t/n}\le\frac{1}{1-\frac{t}{n}}$$

ونجد أن: $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\le e^t$ و $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\le e^{-t}$

ومن ثمَّ:

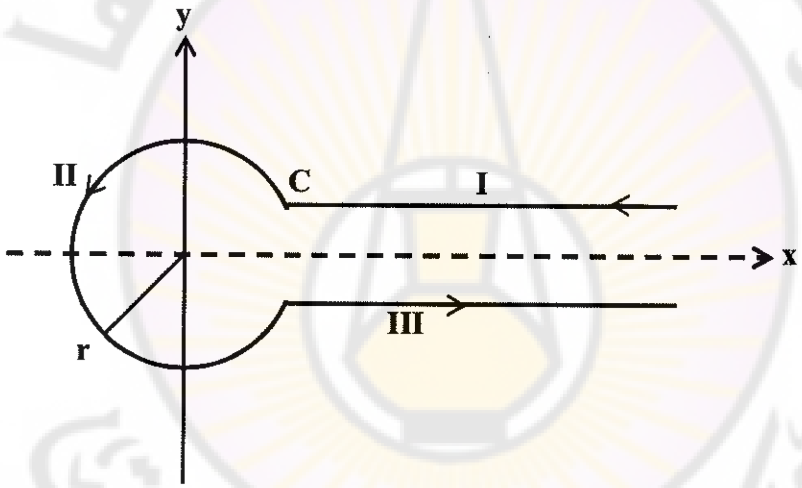
$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \le e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$$

$$= e^{-t}\frac{t^2}{n^2}\left[1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right] \le \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

ولهذا فإن:

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1} dt\right| < \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

ومنه تنتج العلاقة (18) وهذا يبرهن على صحة العلاقة (15).



الشكل (١)

لنستعرض أيضاً التكامل: $F(z) = \int_C e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi$

المأخوذ على المحيط المشكل من ضفتي القطع الممتد على طول النصف الموجب من المحور الحقيقي وقوس الدائرة $\{|\xi| = r\}$ الشكل (١). حيث إن ξ^{z-1} تعني $e^{(z-1)\ln\xi}$ و $\ln\xi$ هو فرع اللوغاريتم الذي من أجله $0 \le \arg \xi \le 2\pi$. على الضفة الأولى I للقطع لدينا:

$$\xi^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} = t^{z-1} \quad , \quad \xi = t$$

وأما على الضفة III حيث $\xi = te^{2\pi i}$ يكون:

$$\xi^{z-1} = e^{(z-1)(\ln t + 2\pi i)} = e^{2\pi iz}\, t^{z-1}$$

ومن ثم فإن:

$$F(z) = \int_{I} + \int_{II} + \int_{III} = \int_{\infty}^{r} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{II} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi + e^{2\pi iz} \int_{r}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= \left(e^{2\pi iz} - 1\right) \int_{r}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{II}$$

لنفرض الآن أن $Re.z > 0$. عندئذ يكون على قوس الدائرة II: $\xi = re^{i\varphi}$:

$$|e^{-\xi}\xi^{z-1}| = e^{-r\cos\varphi}\, e^{(x-1)\ln r - \varphi y} < Ar^{x-1}$$

حيث A ثابت ما ومن ثمَّ فإن:

$$\left|\int_{II}\right| < Ar^{x-1} 2\pi r = A_1 r^{x} \to 0 \quad ; \quad r \to 0$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $r \to 0$ وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (15) نجد:

$$F(z) = \left(e^{2\pi iz} - 1\right) \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \left(e^{2\pi iz} - 1 \cdot \Gamma(z)\right)$$

ومن ثم فإن:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_{C} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi \qquad (19)$$

حيث إن z تنتمي إلى نصف المستوي الأيمن، إلا أنه يمكن البرهان على أن البسط في العلاقة (19) أي $\int_{C} e^{-\xi}\xi^{z-1} d\xi$ هي تابع تحليلي بالنسبة لـ z في جميع النقاط $z \in C$ وبالتالي فإنها تابع صحيح في z. وأما المقام فهو أيضاً تابع صحيح أصفاره هي النقاط $z = k$ مع $k = 0, \pm 1, \ldots$ ومن ثمَّ فإن الطرف الأيمن من (19) تابع تحليلي في جميع

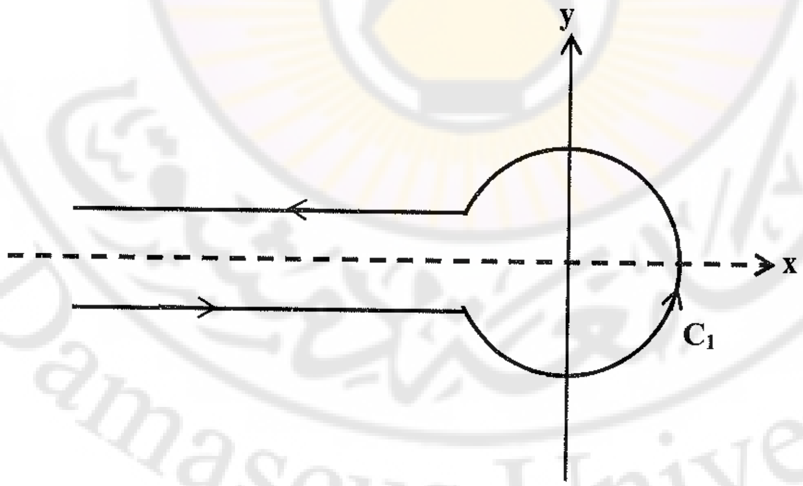
النقاط $z \in C$ و $z \neq k$. وأما الطرف الأيسر من (19) فهو كما وجدنا تابع تحليلي في جميع النقاط z من المستوي العقدي C باستثناء النقاط $z = k$ و $k = 0, -1, \ldots$ ومن ناحية ثانية، إن هذين التابعين يتطابقان في نصف المستوي الأيمن، واستناداً إلى نظرية الوحدانية في التوابع التحليلية يتطابق هذان التابعان في جميع نقاط ساحة تحليليتهما. وهكذا نجد أن العلاقة (19) تعطينا تمثيلاً تكاملياً للتابع $\Gamma(z)$ في المستوي العقدي C.

إن العلاقة (19) تمثل التابع الميرومورفي $\Gamma(z)$ في شكل نسبة بين تابعين صحيحين باستبدال z بـ $1 - z$ في العلاقة (19) نجد أن:

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\int_C e^{-\xi}\xi^{-z}d\xi = \frac{e^{-\pi iz}}{e^{-2\pi iz}-1}\int_C e^{-\xi}(-\xi)^{-z}d\xi =$$

$$= \frac{i}{2\sin \pi z}\int_C e^{-\xi}(-\xi)^{-z}d\xi$$

وباستبدال ξ بـ $(-\xi)$ يصبح التكامل ممتداً على المحيط C_1 المبين في الشكل (٢) نجد التمثيل التكاملي للتابع $\frac{1}{\Gamma(z)}$.



الشكل (٢)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\xi}\xi^{-z}d\xi \qquad (20)$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة هانكل.

٤ . ٤ . ٢ . التابع بيتا:

لنشكل جداء التابعين $\Gamma(q), \Gamma(p)$ ولنفرض أولاً أن $p \geq 1$ و $q \geq 1$:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\left\{\left(\int_0^R e^{-y}y^{p-1}dy\right)\left(\int_0^R e^{-x}x^{q-1}dx\right)\right\} =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\iint_{S_R} e^{-x-y}x^{q-1}y^{p-1}dxdy$$

حيث إن S_R هو المربع $\{x, y \in [0, R]\}$. وبما أن عبارة التكامل المستمر هي تابع مستمر بالنسبة للمتحولين فإن التكامل المكرر يساوي التكامل الثنائي. ليكن T_R المثلث المحدود بالمحورين الإحداثيين والمستقيم $x + y = R$. من الواضح أن:

$$\iint_{S_R/2} < \iint_{T_R} < \iint_{S_R}$$

وبما أن للتكاملين على $S_R/2$ و S_R نفس النهاية فإن:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\iint_{T_R} e^{-x-y}x^{q-1}y^{p-1}dxdy$$

لنجرِ الآن التحويل:

$$x + y = u \;\; ; \;\; y = u\,v$$

فنجد أن: $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = u$، ومن ثم فإن:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\left\{\int_0^R\left(e^{-u}u^{p+q-1}du\right)\cdot\left(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right)\right\}$$

أي إن:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \qquad (21)$$

إن التحديد الذي فرضناه على كل من p $(1 \le p)$ و $(1 \le q)$ يمكن تخفيفه على النحو الآتي: إن الطرف الأيسر من العلاقة (21) تابع تحليلي بالنسبة لـ p عندما يكون $0 < \text{Rep}$ وكذلك تحليلي بالنسبة لـ q عندما يكون $0 < \text{req}$ وهذا ما يجب أن يحققه الطرف الأيمن من (21). ولهذا فإنه بواسطة التمديد التحليلي أولاً بالنسبة لـ p ومن ثم بالنسبة لـ q يمكننا توسيع الساحة التي من أجلها تتحقق المساواة (21) إلى الساحة $0 < \text{Rep}$، $0 < \text{Req}$.

يسمى التكامل:

$$B(p,q)=\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \quad (\text{Re}\, p>0\,,\, \text{Re}\, q>0) \qquad (22)$$

بالتابع بيتا (تكامل أولر من النوع الأول). وتبعاً لذلك يمكننا كتابة العلاقة (21) على الشكل الآتي:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (23)$$

٤ . ٥ . تمارين غير محلولة:

١ . ابحث في تقارب الجداءين:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right) \quad , \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$$

٢ . ابحث في التقارب المطلق للجداء:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^n\right\}$$

٣ . برهن أن الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{c+n}\right)e^{z/n}$ متقارب إطلاقاً من أجل جميع النقاط z شريطة أن لا يكون c عدداً صحيحاً سالباً.

٤ . إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^3$ متقاربة فبرهن على تقارب الجداء اللانهائي:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)e^{u_n+\frac{1}{2}u_n^2}$$

٥ . برهن أن:

$$1)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$$

$$2)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$$

$$3)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

وادرس التقارب المطلق لكل منها.

٦ . عين ساحة التقارب المطلق لكل من الجداءين:

$$1)\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-z^n\right) \qquad 2)\ \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2n}\right)$$

٧ . برهن صحّة ما يلي:

$$1)\ \cos z=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]$$

$$2)\ \sin(a-z)=\sin a\cdot e^{-z\operatorname{ctg} a}\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a+n\pi}\right)e^{z/(a+n\pi)}\ ,\ a\neq k\pi\ ,$$

$k=0, \pm1, \pm2, \dots$

$$3)\ e^z - 1 = ze^{z-2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$$

$$4)\ shz = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2z^2}\right)$$

$$5)\ chz = \prod_{n=0}^{\infty}\left\{1+\left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}$$

٨ . بفرض أن y حقيقي ومغاير للصفر برهن أن:

$$|\Gamma(iy)| = [(\pi/(y\ sh\ \pi y)]^{1/2}$$

٩ . إذا كان $0 < \operatorname{Re} p$ و $0 < \operatorname{Re} q$ فبرهن أن:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)p^{p+q}}dt$$

١٠ . بفرض $z = x + iy$ برهن أن:

$$\left|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+iy)}\right|^2 = \prod_{s=0}^{\infty}\left\{1+\frac{y^2}{(x+s)^2}\right\} \quad ; \ (x \neq 0, -1, -2, \ldots)$$

ومن ثمّ فإن:

$$|\Gamma(x+iy)| \leq |\Gamma(x)|$$

١١ . برهن صحة المساواة:

$$\prod_{s=1}^{\infty}\frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

١٢ . برهن أن:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

١٣ . بفرض أن $0 < \operatorname{Re} z < 1$ برهن أن:

$$\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-it}dt = \Gamma(z)e^{-\pi iz/2}$$

١٤ . احسب التكامل:

$$\int_0^1 \ln\Gamma(t)dt$$

١٥ . برهن أن:

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}B(\frac{1}{2},P)$$

واستنتج أن:

$$\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2n)$$

١٦ . احسب الجداء:

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)....\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

حيث n عدد طبيعي ما.

١٧ . بين أن الجداءات التالية متقاربة وأوجد قيمها:

(1) $\prod_1^{\infty}\left[1+\frac{1}{(n+1)(n+3)}\right]$

(2) $\prod_1^{\infty}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}\right]$

(3) $\prod_2^{\infty}\left[1-\frac{1}{n^2}\right]$

(4) $\prod_2^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$

(ج: (١) $\frac{2}{3}$ (٢) 1 (٣) $\frac{1}{2}$ (٤) $\frac{2}{3}$)

١٨ . أثبت أن $\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ متباعد إلى الصفر.

١٩ . بين أن الجداء $\prod_{1}^{\infty}(1+a_n)$ متقارب بالإطلاق إذا وإذا فقط كان $\prod_{1}^{\infty}(1+|a_n|)$ متقارباً بالإطلاق.

٢٠ . بيّن أن $\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ متباعد في حين أن $\prod_{1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$ متقارب.

٢١ . عين أين يكون كل من الجداءين التاليين متقارباً.

$$(1)\ \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (2)\ \prod_{1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{z+n}\right]e^{-\frac{1}{n}}$$

٢٢ . ناقش تقارب كل من الجداءين في منطقة مغلقة محدودة D لا ينتمي لها أي من النقاط $\pm1, +2, \ldots$.

$$(1)\ \left(1-\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots$$

$$(2)\ \left\{\left(1-\frac{z}{1}\right)e^{z}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z}\right\}\left\{\left(1-\frac{z}{2}\right)e^{z/2}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-z/2}\right\}\ldots.$$

(ج: إن الجداء (1) غير متقارب بالإطلاق، ولكنه متقارب بانتظام في D، وإن الجداء (2) متقارب بانتظام وبالإطلاق في D).

٢٣ . ادرس تقارب كل من الجداءات التالية:

$$(1)\ \prod_{1}^{\infty}\left(n\sin\frac{z}{n}\right)$$

$$(2)\ \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{n-z}{n+z}\right)e^{2z/n}$$

$$(3)\ \prod_{1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1-\frac{z}{n}\right)\right\}$$

$$(4)\ \prod_{0}^{\infty}(1+z^{2n})$$

أثبت أنه عندما يكون $|z| < 1$ فإن قيمة الجداء (4) هو $\frac{1}{1-z}$.

٢٤ . برهن أن:

$$\operatorname{tg} z = 8z\sum_{0}^{\infty}1/\left\{(2n+1)^{2}\pi^{2}-4z^{2}\right\}$$

واستنتج من ذلك أن:

$$\cos z = \prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\pi^{2}}\right)$$

٢٥ . برهن ما يلي:

$$(1)\ \frac{\sin(z-a)}{\sin a} = e^{-z\operatorname{ctg} a}\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a+n\pi}\right)e^{\frac{z}{a+n\pi}}$$

$$(2)\ e^{z}-e^{a} = e^{\frac{z+a}{2}}(z-a)\prod_{1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{z-a}{2\pi n}\right)^{2}\right]$$

$$(3)\ \operatorname{ch} z-\cos z = z^{2}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z^{4}}{4\pi^{4}n^{4}}\right)$$

$$(4)\ \sin z - z\cos z = \frac{z^2}{3}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

بفرض أن $\operatorname{tg}\lambda_n = \lambda_n > 0$

٢٦ . بين أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2zt}dt$$

متقارب بالإطلاق وبانتظام في كل منطقة مغلقة ومحدودة، وأن قيمته تساوي $\sqrt{\pi}e^{z^2}$ ثم استنتج من ذلك أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos 2ty dt = \sqrt{\pi}e^{-y^2}$$

٢٧ . أثبت أن التكاملين:

$$\int_{0}^{\infty} t^{z-1}\cos t dt \quad , \quad \int_{0}^{\infty} t^{z-1}\sin t dt$$

يمثلان تابعين تحليليين عندما يكون $0 < \operatorname{Re} z < 1$ و $-1 < \operatorname{Re} z < 1$ على الترتيب.

٢٨ . أثبت أن:

$$(2n)! = 2^{2n} n!\Gamma(n+\frac{1}{2})/\sqrt{\pi}$$

٢٩ . أثبت أن:

$$\Gamma(z+n) + n^z\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(z)/\Gamma(n+z+1)$$

واستنتج من ذلك أن:

$$\frac{n^z\Gamma(n)}{\Gamma(n+z)} \to 1$$

عندما $n \to \infty$.

٣٠ . استفد من التمرينين السابقين ومن كون: $\Gamma(2z) = \lim_{n\to\infty}\Gamma(2z,2n)$

لتصل إلى دستور التضاعف التالي:

$$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

٣١ . بيّن أن:

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

بفرض أن الجزء الحقيقي لكل من p و q موجب.

٣٢ . بين أن:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$$

٣٣ . أثبت أن:

$$\int_{-1}^{1}(1+t)^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = 2^{p+q-1}B(p,q)$$

بفرض أن الجزء الحقيقي لكل من p و q موجب.

٣٤ . أثبت أن:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right)$$

٣٥ . أثبت أن:

$$\Gamma'(1/2) = -(\gamma + 2\lg 2)\sqrt{\pi}$$

*　　　*　　　*

المصطلحات العلمية

Negative orientation	اتجاه سالب
Positive orientation	اتجاه موجب
Weierstrass M – test	اختبار فيراشتراس
Comparison test	اختبار المقارنة
Ratio test	اختبار النسبة
Independence of path	استقلال عن المسار
Stereographic projection	إسقاط ستريوغرافي
Analytic continuation	استمرار تحليلي
Anti-derivative	أصل المشتقة
Beta function	التابع بيتا
Holomorphic part of	الجزء التحليلي لـ
Principal part of	الجزء الرئيسي لـ
Arg z	السعة الزاوية للعدد
Principle branch	الفرع الرئيسي
Principle value	القيمة الرئيسية
Imaginary axis	المحور التخيلي
Real axis	المحور الحقيقي
Extended complex plane	المستوي المركب المغلق

Residue	رواسب
Many – valued function	تابع متعدد القيم
Partition	تجزئة
Transformation	تحويل
Translation transformation	تحويل انسحابي
Magnification Transformation	تحويل تكبيري
Linear transformation	تحويل خطي
Rotational transformation	تحويل دوراني
Schwartsz – Christoffel transf.	تحويل شوارتز . كريستوفل
Bilinear transformation	تحويل مزدوج الخطية
Gradient	تدرج
Heat flow	تدفق حراري
Fluid flow	تدفق سائل
Mapping	تطبيق
Convergence	تقارب
Absolute convergence	تقارب مطلق
Uniform convergence	تقارب منتظم
Point wise convergence	تقارب موضعي
Integral	تكامل

Euler's integral	تكامل أولر
Line integral	تكامل المسار
Trigonometric integral	تكامل مثلث
Improper integral	تكامل معتل
Analytic continuation	تمديد تحليلي
Analytic continuation along a curve	تمديد تحليلي من خلال منحنٍ
Analytic continuation direct	تمديد تحليلي مباشر
Jordan lemma	توطئة جوردان
Euler's constant	ثابت أولر
Infinite product	جداء لا نهائي
Zero of a function	جذر دالة
Rool of a complex number	جذر عدد مركب
Zero of order m	جذر من الدرجة m
Potential	جهد (طاقة)
Electrostatic potential	جهد كهربائي
Neighbor hood	جوار
Cauchy product	حاصل ضرب كوشي (جداء كوشي)
Boundary of a set	حدود مجموعة
Electric field	حقل كهربائي

Vector field	حقل متجه
Irrotational vector field	حقل متجه غير دوراني
Conservative vector	حقل متجه محافظ
Loop	حلقة
Polygonal line	خط مضلع
Stream lines	خطوط التيار
Force lines	خطوط القوة
Local properties	خواص موضعية
Circle of convergence	دائرة التقارب
Function	دالة
Stream function	دالة التيار
Sine function	دالة الجيب
Exponential function	دالة أسية
Analytic function	دالة تحليلية
Harmonic function	دالة توافقية
Cosine function	دالة جيب التمام
Periodic function	دالة دورية
Inverse function	دالة عكسية
Gamma function	دالة غاما

Entire function	دالة صحيحة
Multiple – valued function	دالة متعددة القيمة
Trigonometric function	دالة مثلثية
Conformal function	دالة مطابقة (مشاكلة)
Rational function	دالة نسبية
One to one function	دالة واحد . لواحد (دالة متباينة)
Velocity potential	سرعة الجهد
Argument	سعة زاوية
Chauchy condition	شرط كوشي
Polar form	شكل قطبي
Image	صورة
De moivre's formula	صيغة ديموافر
Cauchy integral formula	صيغة كوشي للتكامل
Generalized Cauchy integral formula	صيغة كوشي العامة للتكامل
integration path	طريق المكاملة
Integration of a contour	طول كانتور
Pure imaginary number	عدد تخيلي بحت
Real number	عدد حقيقي
Complex number	عدد مركب

Element	عنصر
Branch	فرع
Branch of argument	فرع الزاوية
Branch cut	فصل الفرع . قاطع الفرع
Chain rule	قانون السلسلة
Maximum modulus principle	قانون القيمة العظمى
L'Hopital rule	قانون لوبيتال
Disc	قرص
Closed disc	قرص مغلق
Open disc	قرص مفتوح
Pole	قطب
Simple pole	قطب بسيط
Complex power	قوة مركبة
power	قوى
Cauchy Principal value	قيمة كوشي الرئيسة
Absolute value	قيمة مطلقة
Contour	كانتور (مسار)
Closed contour	كانتور مغلق
Simple closed contour	كانتور مغلق وبسيط

Open contour	كانتور مفتوح
Positively oriented contour	كانتور موجب الاتجاه
Polynomial	كثيرة حدود
Infinity	لا نهاية (الرمز ∞)
Logarithm	لوغاريتم
Principle argument	مبدأ الأرغومينت
Triangular inequality	متباينة المثلث
Sequence	متتالية
Convergent sequence	متتالية تقاربية
Cauchy sequence	متتالية كوشي
Vector	متجه
Equipotential	متساوية الجهد
Isothermal	متساوية الحرارة
Series	متسلسلة
Power series	متسلسلة القوى
Taylor series	متسلسلة تايلور
Divergent series	متسلسلة متباعدة
Convergent series	متسلسلة متقاربة
Cauchy series	متسلسلة كوشي

Laurent Series	متسلسلة لورانت (لوران)
Maclaurin Series	متسلسلة ماكلورين
Geometric series	متسلسلة هندسية
Connected	مترابط
Continuous	مستمر
Domain	مجال
Domain of definition	مجال تعريف الدالة
Simply connected domain	مجال مترابط ترابطاً بسيطاً
Multiply connected domain	مجال متعدد الترابط
Partial sum	مجموع جزئي
Sum of series	مجموع متسلسلة
Unbounded set	مجموعة غير محددة
Bounded set	مجموعة محدودة
Closed set	مجموعة مغلقة
Open set	مجموعة مفتوحة
Range of function	مدى الدالة
Conjugate	مرافق
Harmonic conjugate	مرافق توافقي
Complex conjugate	مرافق مركب

Derivative	مشتقة
Laplace equation	معادلة لابلاس
Parametric equations	معادلات وسيطية
Cauchy – Riemann equations	معادلتي كوشي . ريمان
Complement of a set	مكملة مجموعة
Arc	منحنٍ (قوس)
Smooth curve	منحنٍ (مسار) ممهد (أملس)
Piece – wice smooth curve	منحنٍ ممهد الأجزاء (منحنٍ أملس تقطيعياً)
Jordan Curve	منحنٍ جورداني
Directed smooth curve	منحنٍ ممهد موجه
Level curve	منحنيات المستوي
Region	منطقة
Closed Region	منطقة مغلقة
Open Region	منطقة مفتوحة
Exterior of a curve	منطقة خارجية للمنحني
Interior of a curve	منطقة داخلية للمنحني
Riemann Mapping Lemma	مبرهنة تطبيق ريمان
Green Theorem	مبرهنة غرين
Schwartz Lemma	مبرهنة شوارتز

Cauchy Residue theorem	مبرهنة كوشي للرواسب
Cauchy Integral theorem	مبرهنة كوشي للتكامل
Lieouville theorem	مبرهنة ليوفل
Morera theorem	مبرهنة موريرا
Partial – Fraction expansion	نشر في كسور بسيطة
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Halt plane	نصف المستوي
Monodromy theorem	نظرية الوحدانية في التمديد التحليلي
Rouche's theorem	نظرية روشيه
Superior limit	نهاية عليا
Removable discontinuity	نقطة انفصال قابلة للإزالة
Accumulation point	نقطة تجمع
Bunday point	نقطة حدودية
Exterior point	نقطة خارجية
Interior point	نقطة داخلية
Singular point	نقطة شاذة
Essential singular point	نقطة شاذة لازمة
Removable singularity	نقطة شاذة قابلة للإزالة
Limit	نهاية
Parameter	وسيط

المصادر

١ . د. موفق دعبول، تحليل (٧)، مطبوعات جامعة دمشق ١٩٨٢ .

٢ . د. حسن بدور، تحليل (٧)، مطبوعات جامعة تشرين ١٩٨٨ .

٣ . د. شحادة الأسدي، تحليل (٧)، مطبوعات جامعة حلب ١٩٨٨ .

٤ . د. محمد صبح، التحليل العقدي، مطبوعات جامعة دمشق ٢٠١١ .

٥ . د. صفوان عويرة، التحليل (٣)، مطبوعات جامعة حلب ٢٠٠٣ .

٦ . د. زكريا نوت، التحليل المركب (١)، منشورات جامعة حلب ٢٠١١ .

٧ . ساف. ب. إ و سيندر. د. أ. أسس التحليل المركب، ترجمة د. أبو بكر بيومي ود. سعدون إبراهيم، كلية العلوم . قسم الرياضيات، جامعة الملك سعود، الرياض ٢٠٠٢م.

٨ . وليام دوريك، التحليل المركب وتطبيقاته، ترجمة د. أبو بكر بيومي ود. سعدون إبراهيم، كلية العلوم . قسم الرياضيات . جامعة الملك سعود، الرياض ٢٠٠١م.

٩ . د. محي الدين بحبوح، التحليل العقدي والسلاسل، مطبوعات جامعة دمشق، ٢٠٠٩م.

١٠ . د. عبدو العبيد، د. رهيف زعيتيني، الرياضيات (3) . جامعة البعث، ٢٠٠٨م.

١١ . مواقع متنوعة من شبكة الحاسوب (الإنترنت) بين عامي ٢٠٠٠ و ٢٠١٣م.

12 – Boas; Invitation to Complex Analysis, Random House 1987.

13 – Churchill R., Brown J.W.; Complex variable and Applications, 4th. Ed. Mc Graw – Hill Inc. Book comp. 1984 London.

14 – Fisher, S.D.; Complex Variables, Wadsworth Inc. 1986, Calif. Belmont.

15 – Lang, S.; Complex Analysis, Addison – Wesley pub. Comp. Inc. 1977, London.

16 – Mathews, J.H.; Basic Complex Variables for Mathematics and Engineering, Allyn and Bacon, 1982, Boston.

17 – Rudin, W; Real and Complex Analysis, Mc Graw – Hill comp. 3rd Ed. 1986 N.Y.

18 – Saff, E.B.; Snider, A.D.; Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics science and Engineering. Prentice – Hall Inc. 1976 New Jersey.

19 – Stromberg, K.R.; An Introduction to Classic Real Analysis, Wadsworth 1981 Belmont Calif.

20 – William, R.D, Complex analysis and applications 2nd edn, Wadsworth, 1984.

21 – Yu. V. Sidorov, M.V. Fedoryuk and M.I. shabunin, Lectures on the theory of functions of a complex variables Mir publisher, Moscow, 1985.